Analisi Matematica I (A.A. 2010/2011)

Docente: Fabio Camilli

Esercizi su Calcolo Differenziale

Esercizio 1. Calcolare, utilizzando la regola di de l'Hospital oppure la formula di Taylor, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)}{\sin(x)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{\ln(1+x^2)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\ln(1+\sin(x))}{\cos(x)-1},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\big(e^{\sqrt{x}}-1\big)}{\ln(x^2)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin(x))}{x\cdot e^x},\qquad \lim_{x\to+\infty} x\cdot\big(\ln(x+1)-\ln(x)\big),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1-\cos(x)}{x}}-1}{\tan(x)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin(x)-\ln(1+x)},\qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}-x^2\cdot e^{\frac{1}{x+1}}\Big),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(x)}-e^{\frac{\sin(x)}{x}}}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\big(x^2+e^x\big)^{\frac{1}{\sin(x)}},\qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1\Big)^{\frac{1}{\ln(x)}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-x^2}{x^4},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Big(\frac{\sin(x)}{x}-\frac{x}{\sin(x)}\Big),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(1-\sin^2(2x)+x^5\big)}{1-\cos(2x)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+\ln(\cos(x))}{x^4},\qquad \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x\cdot\tan(x)}-\frac{1}{x^2}\Big),\qquad \lim_{x\to 0}\,(1+x^3)^{\frac{1}{x^2\sin(2x)}}.$$

Esercizio 2. Determinare il dominio e la derivata delle seguenti funzioni ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\sin(x)^{\tan(x)},\qquad x^{(a^x)},\qquad \arcsin\Big(2^{(-x^2)}\Big),\qquad \big(1+\tfrac{1}{x}\big)^x,\qquad \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right),$$

$$\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}},\qquad x^{(x^x)},\qquad \big(\arctan(x^2)\big)^{(x^2)},\qquad (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}},\qquad \tan\left(\frac{1}{1+e^{(x^2)}}\right),$$

$$\ln\Big(\frac{2-x}{2+x}\Big),\qquad x^{(x^a)},\qquad \arccos\left(\sqrt{x^2-2}\right),\qquad (x^a)^{(x^b)},\qquad \sqrt[5]{\sin^2(x)-\ln\big(\tfrac{1}{x^2}\big)}.$$

Esercizio 3. Studiare le funzioni seguenti e tracciarne un grafico approssimativo:

$$e^{1/(x-3)}\cdot|x+3|,\qquad x\cdot\ln^2(x^2),\qquad \ln\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}},\qquad x\cdot e^{\frac{1}{1+\ln(x^4)}},$$

$$\ln\big(5\,e^{2x}-6\,e^x+2\big),\qquad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\qquad \cos^2(x)-\sin(x),\qquad \ln\left(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\right),$$

$$\frac{x^3+x-1}{x^2-1},\qquad \frac{|x+2|^3}{(2x-1)^2},\qquad \arcsin\Big(\frac{x}{1+x^2}\Big),\qquad e^{2x}-2(x+3)\cdot e^x+3(x+1)^2,$$

$$\frac{x}{|x-2|+|x+3|},\qquad x\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x+2}},\qquad e^{\sqrt{x+6-x^2}},\qquad \operatorname{arccosh}\left(\frac{x(x+4)}{x-2}\right).$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - 6x^2 + 12x - 2$.

(a) Mostrare che la funzione f è iniettiva e suriettiva, cioè invertibile.

(b) Determinare i punti in cui f^{-1} è derivabile e calcolare, se ha senso, $\left(f^{-1}\right)'(5)$.

(c) Calcolare un valore approssimativo dello zero di f con un errore inferiore a 2^{-3}.

Esercizio 5. Dimostrare che

(a) $\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;

(b) $\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$;

(c) $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Esercizio 6. Calcolare per funzioni $f, g, h : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili le derivate

$$(f \cdot g)'', \qquad (f \cdot g)''', \qquad (f \cdot g \cdot h)', \qquad (f \cdot g \cdot h)''.$$

Esercizio 7. Calcolare i polinomi di Taylor di grado n con centro x_0 delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
&f(x) := \mathrm{e}^x, && \text{per } n = 4,\ x_0 = 2,\\
&g(x) := x - \cos(x^2) && \text{per } n = 3,\ x_0 = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}},\\
&h(x) := x^2\ln(1+\sin(x)), && \text{per } n = 3,\ x_0 = 0,\\
&k(x) := \tan(x), && \text{per } n = 3,\ x_0 = 0,\\
&l(x) := \frac{1}{1+x}, && \text{per } n = 3,\ x_0 = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 8.

(a) Calcolare il polinomio di Taylor $T_2(x)$ con centro $x_0 = 1000$ e il resto $R_2(x)$ in forma di Lagrange della funzione $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

(b) Calcolare $\sqrt[3]{1003}$ con un errore minore di 10^{-7}.

Esercizio 9. Calcolare, utilizzando la formula di Taylor, le prime tre cifre decimali di $\sin(\frac{1}{4})$, di $\cos\sqrt{\frac{1}{2}}$ e del numero di Nepero e.