1 - Stabilire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{(3x+2)n}$ è convergente, e in tal caso determinare la somma della serie.

. . . .

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione e^{3x+2}. Pertanto la serie è convergente per $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$e^{3x+2} < 1,$$

e quindi $3x + 2 < 0$, cioè $x < -\dfrac{2}{3}$.
La somma della serie è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(3x+2)n} = \frac{1}{1 - e^{3x+2}} \qquad x < -\frac{2}{3}\,.$$

---

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\quad \alpha x + \beta x^2 + \log(1 - 2x) = -5x^2 + o(x^2) \quad$ per $\; x \to 0\,.$

. . . .

Per lo sviluppo di Maclaurin di $\log(1 + x)$ si ha

$$\log(1 - 2x) = -2x - 2x^2 + o(x^2) \qquad\qquad x \to 0\,,$$

e quindi

$$\alpha x + \beta x^2 + \log(1 - 2x) = (\alpha - 2)x + (\beta - 2)x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata per $\alpha - 2 = 0$ e $\beta - 2 = -5$, e quindi $\alpha = 2$ e $\beta = -3$.

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x-1}\, dx$.

. . . .

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x-1}\, dx = \int_{-2}^{-1} \Big(1 + \frac{2}{x-1}\Big) dx = \Big[x + 2\log|x-1|\Big]_{-2}^{-1} = 1 + 2\log 2 - 2\log 3 = 1 + 2\log\frac{2}{3}\,.$$

---

4 - Data la funzione $\quad f(x) = \dfrac{|x+1|}{2x-1} \quad$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita per $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$. Si osservi che

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2x-1} & x \geq -1,\ x \neq \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{x+1}{2x-1} & x < -1. \end{cases}$$

I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}\,, \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}\,,$$

e quindi la retta di equazione $x = \dfrac{1}{2}$ è un asintoto verticale, mentre le rette di equazione $y = -\dfrac{1}{2}$ e $y = \dfrac{1}{2}$ sono asintoti orizzontali per f.
Poiché

$$\Big[\frac{x+1}{2x-1}\Big]' = \frac{2x-1-2x-2}{(2x-1)^2} = -\frac{3}{(2x-1)^2}\,,$$

la derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{(2x-1)^2} & x > -1,\ x \neq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{3}{(2x-1)^2} & x < -1. \end{cases}$$

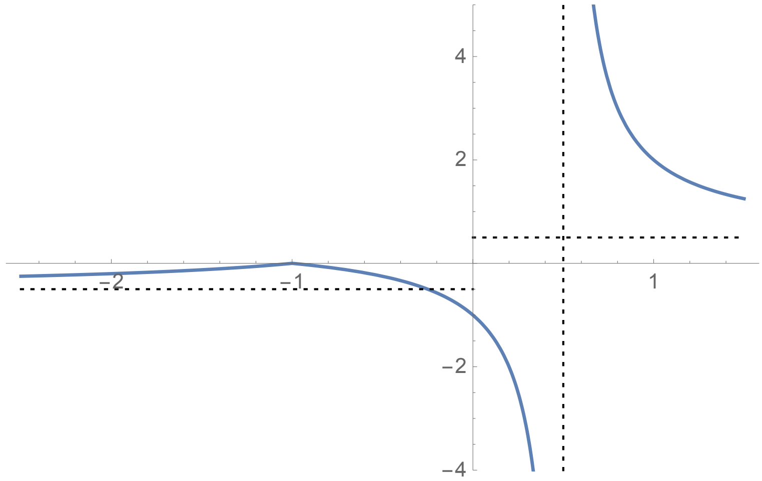
La funzione f non è derivabile in -1, in quanto

$$f'_-(-1) = \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{3} = f'_+(-1)\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-\infty, -1)$, mentre è decrescente in $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; di conseguenza $f(-1) = 0$ è un massimo locale per f.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{(2x-1)^3} & x > -1,\ x \neq \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{12}{(2x-1)^3} & x < -1. \end{cases}$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è convessa in $(-\infty, -1)$ e in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, mentre è concava in $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.



5 - (i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $\quad y'' - y = \cos x$.
(ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y = \cos x\,, \\ y(0) = -\frac{1}{2},\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$

. . . .

(i) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può utilizzare il metodo *ad hoc*, cioè trovare una soluzione particolare nella forma $\widetilde{y}(x) = a\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x$, con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare. Infatti per $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 0$ la funzione $\widetilde{y}(x) = -\frac{1}{2}\cos x$ è soluzione di $y'' - y = \cos x$ e quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Imponendo all'espressione dell'integrale generale le condizioni iniziali $y(0) = -\frac{1}{2}$ e $y'(0) = 0$ si ottiene $C_1 + C_2 = 0$ e $C_1 - C_2 = 0$, da cui segue $C_1 = C_2 = 0$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = -\frac{1}{2}\cos x,$$

cosa che poteva essere dedotta direttamente dal fatto che è soluzione dell'equazione differenziale e verifica le condizioni iniziali assegnate.