

1 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ è convergente.

La serie assegnata è a termini positivi. In forza di

$$\frac{1}{n^{\alpha-2}} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^{\alpha-2}}(1 + o(1)) \quad n \rightarrow \infty.$$

si può applicare il criterio del confronto asintotico: la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ che converge per $\alpha - 2 > 1$, cioè $\alpha > 3$.

In conclusione, la serie assegnata è convergente se e solo se $\alpha > 3$.

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $e^{-x} + \log(1+x) + \alpha + \beta x^2 = 4x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\log(1+x)$ si ha

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0,$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$e^{-x} + \log(1+x) + \alpha + \beta x^2 = 1 + \alpha + \beta x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata per $\alpha = -1$ e $\beta = 4$.

3 - Calcolare l'integrale $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

Si osservi che

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 2 \int_1^3 \frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2 + 1} dx = 2[\arctg(\sqrt{x})]_1^3 = \frac{\pi}{6}.$$

Si giunge allo stesso risultato integrando per sostituzione e ponendo $t = \sqrt{x}$.

4 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \sin x - 5 \sin x \\ y(\pi) = 5 \end{cases}$.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

(i) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{-\cos x} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si deve calcolare l'integrale

$$\int e^{\cos x} \sin x dx = -e^{\cos x};$$

di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{-\cos x} + 5 \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(\pi) = 5$ si ha $C = 0$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x} y(x) = 5e^{\alpha x}$$

si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$ per $\alpha < 0$.

5 - Data la funzione $f(x) = \log x |2 + \log x|$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

La funzione è definita per $x > 0$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

e quindi la retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale per f .

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \frac{|2 + \log x|}{x} + \frac{\log x}{x} \frac{|2 + \log x|}{2 + \log x} = 2 \frac{|2 + \log x|}{x(2 + \log x)} (1 + \log x) \quad x > 0, x \neq e^{-2},$$

e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} -2 \frac{1 + \log x}{x} & 0 < x < e^{-2} \\ 2 \frac{1 + \log x}{x} & x > e^{-2}. \end{cases}$$

La funzione f non è derivabile in e^{-2} , in quanto

$$f'_-(e^{-2}) = 2e^2 \neq -2e^2 = f'_+(e^{-2}).$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(0, e^{-2})$ e in $(e^{-1}, +\infty)$, mentre è decrescente in (e^{-2}, e^{-1}) ; di conseguenza $f(e^{-2}) = 0$ è un massimo locale per f e $f(e^{-1}) = -1$ è un minimo locale per f .

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

