1 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2n^{3\alpha}}$ è convergente.

. . . .

La serie assegnata è a termini positivi. Se $3\alpha > 1$ si ha

$$\frac{1}{n+2n^{3\alpha}} = \frac{1}{n^{3\alpha}} \frac{1}{n^{1-3\alpha}+2} = \frac{1}{n^{3\alpha}}\Big(\frac{1}{2}+o(1)\Big) \qquad n \to \infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}}$ che converge perché $3\alpha > 1$, e quindi $\alpha > \dfrac{1}{3}$. Per $\alpha = \dfrac{1}{3}$ si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = +\infty$. Infine, per $3\alpha < 1$ si ha

$$\frac{1}{n+2n^{3\alpha}} = \frac{1}{n} \frac{1}{1+2n^{3\alpha-1}} = \frac{1}{n}(1+o(1)) \qquad n \to \infty,$$

e di conseguenza la serie diverge, in quanto per il criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere della serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

In conclusione, la serie assegnata è convergente se e solo se $\alpha > \dfrac{1}{3}$.

---

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\quad 12\cos x + \operatorname{sen}(6x^2) + \alpha + \beta x^4 = x^4 + o(x^4) \quad$ per $\;x \to 0$.

. . . .

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

$$\operatorname{sen}(6x^2) = 6x^2 + o(x^4) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

e quindi

$$12\cos x + \operatorname{sen}(6x^2) + \alpha + \beta x^4 = 12 + \alpha - 6x^2 + \Big(\frac{1}{2}+\beta\Big)x^4 + 6x^2 + o(x^4) \qquad \text{per} \;\; x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $12 + \alpha = 0$ e $\dfrac{1}{2} + \beta = 1$, cioè $\alpha = -12$ e $\beta = \dfrac{1}{2}$.

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^2 e^{-\frac{\log x}{3}}\, dx$.

. . . .

Grazie a

$$e^{-\frac{\log x}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,,$$

si ha

$$\int_1^2 e^{-\frac{\log x}{3}}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \frac{3}{2}\big[x^{2/3}\big]_1^2 = \frac{3}{2}(2^{2/3}-1)\,.$$

---

4 - (i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $\quad y'' - 9y = e^{-4x}$.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ ogni soluzione $y(x)$ verifica la condizione $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

. . . .

(i) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 9 = 0,$$

e quindi $\lambda = \pm 3$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può utilizzare il metodo *ad hoc*, cioè trovare una soluzione particolare nella forma $\widetilde{y}(x) = a e^{-4x}$, con $a \in \mathbb{R}$ da determinare. Infatti per $a = \dfrac{1}{7}$ la funzione $\widetilde{y}(x) = \dfrac{1}{7}e^{-4x}$ è soluzione di $y'' - 9y = e^{-4x}$ e quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{7}e^{-4x} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x} y(x) = e^{(\alpha-4)x}\Big(C_1 e^{7x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{7}\Big) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

si ha $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$ se $\alpha - 4 > 0$, cioè $\alpha > 4$.

5 - Data la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\big(\log(3+x) - x\big)$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

. . . .

La funzione è definita per $x > -3$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$

e quindi la retta di equazione $y = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale per f.
La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \big(\log(3+x) - x\big)^2}\Big(\frac{1}{3+x} - 1\Big) = -\frac{1}{1 + \big(\log(3+x) - x\big)^2}\,\frac{2+x}{3+x} \qquad x > -3\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-3,-2)$, mentre è decrescente in $(-2,+\infty)$; di conseguenza $f(-2) = \operatorname{arctg} 2$ è il massimo assoluto per f.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.