

1 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha + 7}{n^6 - 3\sqrt{n}}$ è convergente.

Per ogni $\alpha > 0$ si ha

$$\frac{n^\alpha + 7}{n^6 - 3\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{6-\alpha}}(1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Poiché la serie assegnata è definitivamente a termini positivi, per il criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{6-\alpha}}$ che converge se e solo se $6 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 5$.

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $3e^{\sqrt{x}} - 3 + \alpha\sqrt{x} + \log(1 + \beta x) = \frac{x}{2} + o(x)$ per $x \rightarrow 0^+$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\log(1 + x)$ si ha

$$e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

$$\log(1 + \beta x) = \beta x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$3e^{\sqrt{x}} - 3 + \alpha\sqrt{x} + \log(1 + \beta x) = (3 + \alpha)\sqrt{x} + \left(\frac{3}{2} + \beta\right)x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $3 + \alpha = 0$ e $\frac{3}{2} + \beta = \frac{1}{2}$, cioè $\alpha = -3$ e $\beta = -1$.

3 - Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{t} dt$ nel punto $x_0 = \log 3$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = \frac{e^x}{x},$$

e di conseguenza $F'(\log 3) = \frac{3}{\log 3}$.

4 - Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \operatorname{tg}(3x)y & -\pi/6 < x < \pi/6 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Per determinare l'integrale generale occorre calcolare $\int \operatorname{tg}(3x) dx$. Infatti, tenendo conto che $\cos(3x) > 0$ per ogni $x \in (-\pi/6, \pi/6)$, si ha

$$\int \operatorname{tg}(3x) dx = -\frac{1}{3} \log(\cos(3x)) \quad -\pi/6 < x < \pi/6,$$

e di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{-\frac{1}{3} \log(\cos(3x))} = \frac{C}{\sqrt[3]{\cos(3x)}} \quad -\pi/6 < x < \pi/6, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 2$ si ha $C = 2$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{\cos(3x)}} \quad -\pi/6 < x < \pi/6.$$

5 - Data la funzione $f(x) = \frac{x}{\log(5x)}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione è definita per $x > 0$ e $x \neq \frac{1}{5}$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

e quindi la retta $x = \frac{1}{5}$ è asintoto verticale per f .

La derivata prima di f è data da

$$f'(x) = \frac{\log(5x) - 1}{\log^2(5x)} \quad x > 0, x \neq \frac{1}{5}.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $(0, \frac{1}{5})$ e in $(\frac{1}{5}, \frac{e}{5})$, mentre è crescente in $(\frac{e}{5}, +\infty)$. Pertanto $f(\frac{e}{5}) = \frac{e}{5}$ è un minimo relativo per f .

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \log^2(5x) - \frac{2}{x} \log(5x)(\log(5x) - 1)}{\log^4(5x)} = \frac{2 - \log(5x)}{x \log^3(5x)} \quad x > 0, x \neq \frac{1}{5}.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(0, \frac{1}{5})$ e in $(\frac{e^2}{5}, +\infty)$, mentre è convessa in $(\frac{1}{5}, \frac{e^2}{5})$; di conseguenza $\frac{e^2}{5}$ è punto di flesso.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

