1 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^3 - \sqrt{n}}$ è convergente.

. . . .

La serie assegnata è a termini positivi.
Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{n^\alpha}{n^3 - \sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3-\alpha}(1 - n^{-5/2})} = \frac{1}{n^{3-\alpha}}(1 + o(1)) \qquad n \to \infty.$$

Pertanto per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ che converge se e solo se $3 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 2$.

---

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\log(1-x^2)+e^{3x}-1+\alpha x+\beta x^2 = -\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ per $x \to 0$.

. . . .

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\log(1 + x)$ e e^x si ha

$$\log(1 - x^2) = -x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0\,,$$

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0\,,$$

e quindi

$$\log(1 - x^2) + e^{3x} - 1 + \alpha x + \beta x^2 = (\alpha + 3)x + \Big(\frac{9}{2} - 1 + \beta\Big)x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\alpha + 3 = 0$ e $\frac{9}{2} - 1 + \beta = -\frac{1}{2}$, cioè $\alpha = -3$ e $\beta = -4$.

---

3 - Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{sen}^9 t}{t}\, dt$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

. . . .

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale per ogni $x > 0$ si ha

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen}^9 x}{x}\,,$$

e di conseguenza $F'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{2}{\pi}$.

---

4 - Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}y + 2x^2, & x > 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$.

. . . .

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{\log x} = Cx \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si deve calcolare l'integrale

$$2\int e^{-\log x}x^2\, dx = 2\int x\, dx = x^2\,.$$

Pertanto una soluzione particolare è data da

$$\widetilde{y}(x) = x^3.$$

L'integrale generale è dato da

$$y(x) = Cx + x^3 \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 2$ si ha $C = 1$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = x + x^3.$$

5 - Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{\log(3x)}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

. . . .

La funzione è definita per $x > 0$ e $x \neq \frac{1}{3}$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{3}^-} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

e quindi la retta $x = \frac{1}{3}$ è asintoto verticale per f.
La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{2x\log(3x) - x^2\frac{1}{x}}{\log^2(3x)} = \frac{x(2\log(3x) - 1)}{\log^2(3x)} \qquad x > 0\,, x \neq \frac{1}{3}\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ e in $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{e}}{3}\right)$, mentre è crescente in $\left(\frac{\sqrt{e}}{3}, +\infty\right)$.
Pertanto $f\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right) = \frac{2e}{9}$ è un minimo relativo per f.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.