1 - Stabilire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(x+1)}$ è convergente, e in tal caso determinare la somma della serie.

....

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $e^{-(x+1)} > 0$. Pertanto la serie è convergente per $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$e^{-(x+1)} < 1,$$

cioè $x > -1$.
La somma della serie è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(x+1)} = \frac{1}{1-e^{-(x+1)}} - 1 = \frac{1}{e^{x+1}-1}, \qquad x > -1\,.$$

---

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\operatorname{sen} x + \log(1-2x^3) + \alpha x + \beta x^3 = -2x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.

....

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\operatorname{sen} x$ e $\log(1+x)$ si ha

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

$$\log(1-2x^3) = -2x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

e quindi

$$\operatorname{sen} x + \log(1-2x^3) + \alpha x + \beta x^3 = (1+\alpha)x + \Big(\beta - \frac{1}{6} - 2\Big)x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $1+\alpha = 0$ e $\beta - \frac{1}{6} - 2 = -2$, cioè $\alpha = -1$ e $\beta = \frac{1}{6}$.

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$.

....

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{x}{x+1}\,dx = 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(1 - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx = 2\Big[\sqrt{x} - \arctan(\sqrt{x})\Big]_1^4 = 2 - 2\arctan 2 + \frac{\pi}{2}\,.$$

Si giunge allo stesso risultato se si integra per sostituzione e si pone $t = \sqrt{x}$.

---

4 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y = 9e^{2x} \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 6\,. \end{cases}$

....

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può utilizzare il metodo *ad hoc*, cioè trovare una soluzione particolare nella forma $\widetilde{y}(x) = ae^{2x}$, con $a \in \mathbb{R}$ da determinare. Infatti per $a = 3$ la funzione $\widetilde{y}(x) = 3e^{2x}$ è soluzione di $y'' - y = 9e^{2x}$ e quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 3e^{2x} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo all'espressione dell'integrale generale le condizioni iniziali $y(0) = 3$ e $y'(0) = 6$ si ottiene $C_1 + C_2 = 0$ e $C_1 - C_2 = 0$, da cui segue $C_1 = C_2 = 0$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = 3e^{2x},$$

cosa che poteva essere dedotta direttamente dal fatto che è soluzione dell'equazione differenziale e verifica le condizioni iniziali assegnate.

---

5 - Data la funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita per ogni $x \geq 0$, $x \neq 1$. I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

e quindi la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale per f.
La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x}/2}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2} \qquad x > 0\,,\ x \neq 1\,,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1\,,$$

$$f'(x) = 0, \qquad \text{per} \quad x = 4.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $(0,1)$ e in $(1,4)$, mentre è crescente in $(4,\infty)$. Pertanto, $f(0) = 0$ è un massimo relativo per f e $f(4) = 4$ è un minimo relativo per f.
La derivata seconda di f è data da

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)^2 - \frac{2}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{2(\sqrt{x}-1)^4} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1 - 2(\sqrt{x}-2)}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3} = \frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3} \qquad x > 0\,,\ x \neq 1\,, \end{aligned}$$

$$f''_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f''(x) = -\infty\,,$$

$$f''(x) = 0, \qquad \text{per} \quad x = 9.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(0,1)$ e in $(9,+\infty)$, mentre è convessa in $(1,9)$, e di conseguenza $x = 9$ è punto di flesso per f.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.