

1 - Stabilire il comportamento della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sqrt[3]{n}}{n^3 - 1}$.

La serie è a termini positivi. Si noti che

$$\frac{n\sqrt[3]{n}}{n^3 - 1} = \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^3} \frac{1}{1 - n^{-3}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}} (1 + o(1)) \quad n \rightarrow +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$, che è convergente perché $\frac{5}{3} > 1$. In conclusione, la serie assegnata è convergente.

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $e^{-2x} + \log(1+x) - 1 + \alpha x + \beta x^2 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\log(1+x)$ si ha

$$e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$e^{-2x} + \log(1+x) - 1 + \alpha x + \beta x^2 = (\alpha - 1)x + \left(\frac{3}{2} + \beta\right)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\alpha - 1 = 0$ e $\frac{3}{2} + \beta = \frac{1}{2}$, cioè $\alpha = 1$ e $\beta = -1$.

3 - Calcolare l'integrale $\int_0^1 x^2 \cos(2x^3) dx$.

$$\int_0^1 x^2 \cos(2x^3) dx = \frac{1}{6} \int_0^1 6x^2 \cos(2x^3) dx = \frac{1}{6} [\sin(2x^3)]_0^1 = \frac{\sin 2}{6}.$$

4 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

(i) Per determinare l'integrale generale dell'equazione assegnata, occorre calcolare

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1-x}, \quad x < 1.$$

Pertanto, l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{-2\sqrt{1-x}} \quad x < 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ha $C = e^2$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = e^{2(1-\sqrt{1-x})}.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x} y(x) = e^{\alpha x + 2(1-\sqrt{1-x})} = e^{x[\alpha + 2(1-\sqrt{1-x})/x]}$$

si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$ se $\alpha \geq 0$.

5 - Data la funzione $f(x) = x(1-x^2)^4$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è dispari, di conseguenza è sufficiente studiarla per $x \geq 0$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La derivata di f è data da

$$f'(x) = (1-x^2)^4 - 8x^2(1-x^2)^3 = (1-x^2)^3(1-9x^2).$$

$$f'(x) = 0, \quad \text{per } x = 1, \quad x = \frac{1}{3}.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(0, \frac{1}{3})$ e in $(1, +\infty)$, mentre è decrescente in $(\frac{1}{3}, 1)$. Pertanto,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{9}\right)^4 = \frac{2^{12}}{3^9} \text{ è un massimo relativo e } f(1) = 0 \text{ è un minimo relativo per } f.$$

La derivata seconda di f è data da

$$\begin{aligned} f''(x) &= -6x(1-x^2)^2(1-9x^2) - 18x(1-x^2)^3 = -6x(1-x^2)^2(1-9x^2+3-3x^2) \\ &= 24x(1-x^2)^2(3x^2-1). \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0, \quad \text{per } x = 0, \quad x = 1, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(0, 1/\sqrt{3})$, mentre è convessa in $(1/\sqrt{3}, +\infty)$, e di conseguenza $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di flesso per f .

Tenendo conto che la funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi, anche $x = 0$ è punto di flesso e un grafico approssimativo di f è il seguente.

