

1 - Stabilire per quali valori del parametro $x > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log_2(x) - \frac{1}{n} \right)^n$ è convergente.

Applicando il criterio della radice alla serie dei valori assoluti si ha

$$\left| \log_2(x) - \frac{1}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\log_2 x|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente se $|\log_2 x| < 1$, cioè $2^{-1} < x < 2$.

Nel caso $|\log_2 x| = 1$, cioè $x = 2^{-1}$ o $x = 2$, si ha rispettivamente

$$\left| (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \neq 0,$$

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq 0,$$

e quindi le serie non convergono, perchè non è verificata la condizione necessaria alla convergenza.

Infine, se $|\log_2 x| > 1$ si ha

$$|\log_2 x|^n \left(1 - \frac{1}{n \log_2 x} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \cdot e^{-\frac{1}{\log_2 x}} = +\infty,$$

e quindi la rispettiva serie non converge.

2 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - \sqrt{3}y' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$.
(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

(i) L'equazione differenziale è omogenea del secondo ordine e l'equazione caratteristica è data da

$$\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}.$$

Pertanto l'integrale generale è

$$y(x) = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} \left(C_1 \sin \frac{x}{2} + C_2 \cos \frac{x}{2} \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ si ricavano i valori delle costanti arbitrarie, precisamente $C_1 = 2$ e $C_2 = 0$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = 2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} \sin \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x} y(x) = 2e^{(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2})x} \sin \frac{x}{2}$$

si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$ se $\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, cioè $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 - Data la funzione $f(x) = \frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

La funzione è definita per $x \neq 0$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \frac{1 + 3e^{-2x}}{1 - e^{-x}} = +\infty,$$

e quindi la retta $y = -3$ è asintoto orizzontale e la retta $x = 0$ è asintoto verticale per f .

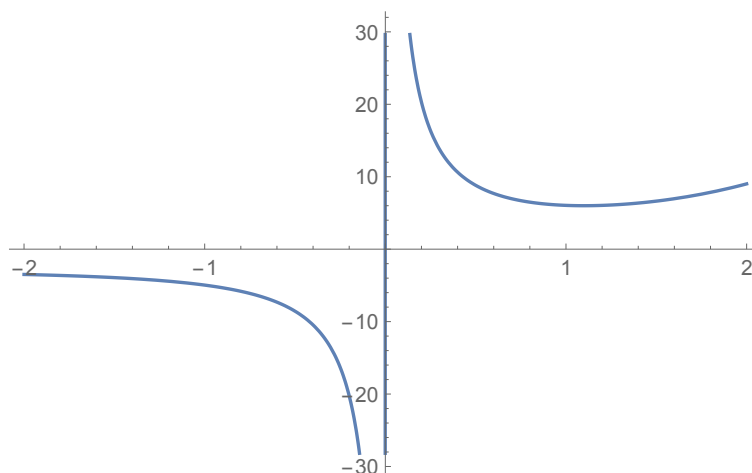
La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x - 1) - e^x(e^{2x} + 3)}{(e^x - 1)^2} = e^x \frac{e^{2x} - 2e^x - 3}{(e^x - 1)^2} \quad x \neq 0.$$

$$f'(x) = 0, \quad e_{1,2}^x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2, \quad e^x = 3, \quad x = \log 3.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(\log 3, +\infty)$, mentre è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, \log 3)$. Pertanto, $f(\log 3) = 6$ è un minimo relativo per f .

Un grafico approssimativo di f è il seguente.



4 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $e^{x^4} - \cos(2x) + \alpha x^2 + \beta x^4 = -\frac{5}{3}x^4 + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\cos x$ si ha

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$e^{x^4} - \cos(2x) + \alpha x^2 + \beta x^4 = (2 + \alpha)x^2 + \left(1 - \frac{2}{3} + \beta\right)x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $2 + \alpha = 0$ e $1 - \frac{2}{3} + \beta = -\frac{5}{3}$, cioè $\alpha = \beta = -2$.

5 - Calcolare l'integrale $\int_{e/3}^1 \frac{(\log(3x))^5}{x} dx$.

In forza di $(\log(3x))' = \frac{1}{x}$, si ha

$$\int_{e/3}^1 \frac{(\log(3x))^5}{x} dx = \int_{e/3}^1 (\log(3x))^5 (\log(3x))' dx = \left[\frac{(\log(3x))^6}{6} \right]_{e/3}^1 = \frac{(\log 3)^6 - 1}{6}.$$