

1 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{n^2 - 3}{n^\alpha + 5} \right)$ è convergente.

Per ogni $\alpha > 2$ si ha

$$\frac{n^2 - 3}{n^\alpha + 5} = \frac{1}{n^{\alpha-2}}(1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

e quindi, grazie al limite notevole

$$\operatorname{tg} x = x(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0,$$

si ha

$$\operatorname{tg} \left(\frac{n^2 - 3}{n^\alpha + 5} \right) = \frac{1}{n^{\alpha-2}}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Poiché per $\alpha > 2$ la serie assegnata è definitivamente a termini positivi, per il criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ che converge se e solo se $\alpha - 2 > 1$, cioè $\alpha > 3$.

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\sqrt[4]{1 + \alpha x^2} + \log(1 + 2x) + \beta x - 1 = -3x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Per il limite notevole

$$\sqrt[4]{1 + x} = 1 + \frac{1}{4}x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e lo sviluppo di Maclaurin di $\log(1 + x)$ si ha

$$\sqrt[4]{1 + \alpha x^2} = 1 + \frac{\alpha}{4}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\log(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$\sqrt[4]{1 + \alpha x^2} + \log(1 + 2x) + \beta x - 1 = (2 + \beta)x + \left(\frac{\alpha}{4} - 2\right)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $2 + \beta = 0$ e $\frac{\alpha}{4} - 2 = -3$, cioè $\alpha = -4$ e $\beta = -2$.

3 - Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \int_x^3 \sin(4t^2) dt$ nel punto $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = -\sin(4x^2),$$

e di conseguenza $F'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2y - \cos x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

(i) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{2x} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può applicare il metodo *ad hoc* e cercare la soluzione nella forma

$$\tilde{y}(x) = a \sin x + b \cos x,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare. Imponendo che $\tilde{y}(x) = a \sin x + b \cos x$ sia soluzione di $y' = 2y - \cos x$ si ottiene $a = -\frac{1}{5}$ e $b = \frac{2}{5}$, e di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(\pi) = 0$ si ha $C = \frac{2}{5}e^{-2\pi}$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = \frac{2}{5}e^{2x-2\pi} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{2}{5}\cos x.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x}y(x) = \frac{2}{5}e^{(\alpha+2)x-2\pi} + \frac{e^{\alpha x}}{5}(2\cos x - \sin x)$$

si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x}y(x) = 0$ se $\alpha + 2 < 0$ e $\alpha < 0$, cioè $\alpha < -2$.

5 - Data la funzione $f(x) = \frac{x-3e}{1-\log(x-3e)}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

La funzione è definita per $x > 3e$ e $x \neq 4e$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow 3e^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4e^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4e^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

e quindi la retta $x = 4e$ è asintoto verticale per f .

La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{1 - \log(x-3e) + 1}{(1 - \log(x-3e))^2} = \frac{2 - \log(x-3e)}{(1 - \log(x-3e))^2} \quad x > 3e, x \neq 4e.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(3e, 4e)$ e in $(4e, 3e+e^2)$, mentre è decrescente in $(3e+e^2, +\infty)$. Pertanto, $f(3e+e^2) = -e^2$ è un massimo relativo per f .

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

