1 - Stabilire il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^{\sqrt{2}}}\right)$.

La serie è a termini positivi. Grazie al limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$, si ha

$$\log\left(1+\frac{1}{n^{\sqrt{2}}}\right)=\frac{1}{n^{\sqrt{2}}}(1+o(1)) \qquad n\to+\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$, che è convergente perché $\sqrt{2}>1$. In conclusione, la serie assegnata è convergente.

---

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $e^{3x}-1-3x+\alpha x^2+\beta x^3=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$ per $x\to 0$.

Per lo sviluppo di Maclaurin di e^x si ha

$$e^{3x}=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+o(x^3) \qquad \text{per} \quad x\to 0,$$

e quindi

$$e^{3x}-1-3x+\alpha x^2+\beta x^3=\Big(\alpha+\frac{9}{2}\Big)x^2+\Big(\beta+\frac{9}{2}\Big)x^3+o(x^3) \qquad \text{per} \quad x\to 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\alpha+\frac{9}{2}=0$ e $\beta+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$, cioè $\alpha=-\frac{9}{2}$ e $\beta=-4$.

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}\min\{e^{-x},1\}\,dx$.

$$\int_{-1}^{1}\min\{e^{-x},1\}\,dx=\int_{-1}^{0}dx+\int_{0}^{1}e^{-x}\,dx=2-e^{-1}.$$

---

4 - Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=y+\operatorname{sen}x \\ y(0)=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x)=Ce^x \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può applicare il metodo *ad hoc* e cercare la soluzione nella forma

$$\widetilde{y}(x)=a\operatorname{sen}x+b\cos x,$$

con $a,b\in\mathbb{R}$ da determinare. Imponendo che $\widetilde{y}(x)=a\operatorname{sen}x+b\cos x$ sia soluzione di $y'=y+\operatorname{sen}x$ si ottiene $a=b=-\frac{1}{2}$, e di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x)=Ce^x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\cos x \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0)=-\frac{1}{2}$ si ha $C=0$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\cos x.$$

---

5 - Data la funzione $f(x)=e^{2x}(x^2-x)$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

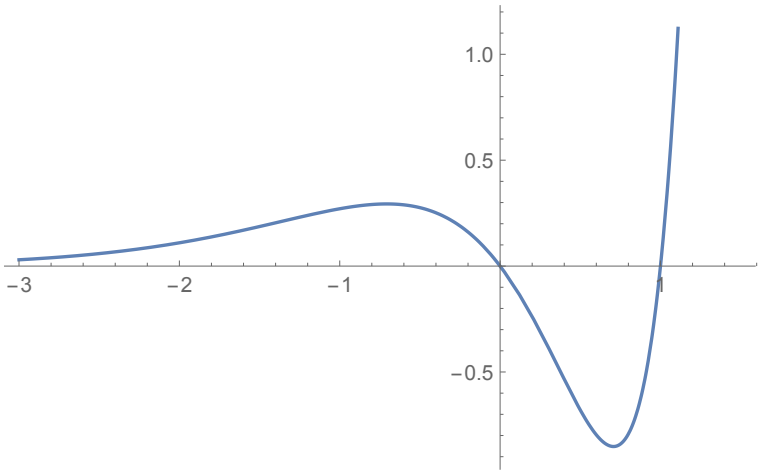
La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

e quindi la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f.
La derivata di f è data da

$$f'(x) = 2e^{2x}(x^2 - x) + e^{2x}(2x - 1) = e^{2x}(2x^2 - 1) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$, mentre è decrescente in $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Pertanto, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è massimo relativo e $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è minimo assoluto per f.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 - 1) + 4xe^{2x} = 2e^{2x}(2x^2 + 2x - 1) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è convessa in $\left(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ e in $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$, mentre è concava in $\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$. Pertanto $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.