1 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \big(e^{1/n^\pi} - 1\big)$ è convergente.

....

La serie è a termini positivi, in quanto $e^{\frac{1}{n^\pi}} > 1$ per ogni $n \geq 1$. Grazie al limite notevole $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, si ha

$$e^{1/n^\pi} - 1 = \frac{1}{n^\pi}(1 + o(1)) \qquad n \to +\infty,$$

e di conseguenza

$$n^\alpha \big(e^{1/n^\pi} - 1\big) = \frac{1}{n^{\pi-\alpha}}(1 + o(1)) \qquad n \to +\infty\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi-\alpha}}$ convergente per $\pi - \alpha > 1$, cioè $\alpha < \pi - 1$. In conclusione, la serie assegnata è convergente solo se $\alpha < \pi - 1$.

---

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\alpha \operatorname{sen}(2x) + \beta\sqrt{x} + \log(1 - 3\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}x + o(x)$ per $x \to 0^+$.

....

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\operatorname{sen} x$ e $\log(1 + x)$ si ha

$$\operatorname{sen}(2x) = 2x + o(x) \qquad\qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

$$\log(1 - 3\sqrt{x}) = -3\sqrt{x} - \frac{9}{2}x + o(x) \qquad \text{per} \quad x \to 0^+\,,$$

e quindi

$$\alpha \operatorname{sen}(2x) + \beta\sqrt{x} + \log(1 - 3\sqrt{x}) = (\beta - 3)\sqrt{x} + \Big(2\alpha - \frac{9}{2}\Big)x + o(x) \qquad \text{per} \ \ x \to 0^+\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\beta - 3 = 0$ e $2\alpha - \dfrac{9}{2} = \dfrac{1}{2}$, cioè $\alpha = \dfrac{5}{2}$ e $\beta = 3$.

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x}\, dx$.

....

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x}\, dx = \big[- \cos(\log x)\big]_1^2 = 1 - \cos(\log 2)\,.$$

---

4 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 5y + e^{-5x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

....

(i) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{5x} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può applicare il metodo *ad hoc* e cercare la soluzione nella forma

$$\widetilde{y}(x) = ae^{-5x},$$

con $a \in \mathbb{R}$ da determinare. Imponendo che $\widetilde{y}(x) = ae^{-5x}$ sia soluzione di $y' = 5y + e^{-5x}$ si ottiene $a = -\dfrac{1}{10}$, e di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{5x} - \frac{1}{10}e^{-5x} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$ si ha $C = \dfrac{1}{10}$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = \frac{e^{5x} - e^{-5x}}{10} = \frac{\sinh(5x)}{5}.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x}y(x) = \frac{e^{(\alpha+5)x} - e^{(\alpha-5)x}}{10}$$

si ha $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x}y(x) = 0$ se $\alpha + 5 < 0$ e $\alpha - 5 < 0$, cioè $\alpha < -5$.

---

5 - Data la funzione $f(x) = x^3(1 - \log x)$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita per ogni $x > 0$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,.$$

La derivata di f è data da

$$f'(x) = 3x^2(1 - \log x) - x^2 = x^2(2 - 3\log x) \qquad x > 0\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(0, e^{2/3})$, mentre è decrescente in $(e^{2/3}, +\infty)$. Pertanto, $f(e^{2/3}) = \dfrac{e^2}{3}$ è il massimo assoluto per f.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = 2x(2 - 3\log x) - 3x = x(1 - 6\log x) \qquad x > 0\,.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è convessa in $(0, e^{1/6})$, mentre è concava in $(e^{1/6}, +\infty)$, e quindi $x = e^{1/6}$ è punto di flesso per f.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.