

1 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^3 + 1} \right)$ è convergente.

La serie assegnata è a termini positivi. Grazie al limite notevole

$$\operatorname{sen} x = x(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0,$$

si ha

$$n^{\alpha} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^3 + 1} \right) = \frac{n^{\alpha}}{n^3 + 1} (1 + o(1)) = \frac{1}{n^{3-\alpha}} \frac{1}{1 + n^{-3}} (1 + o(1)) = \frac{1}{n^{3-\alpha}} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

e di conseguenza per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ che converge se e solo se $3 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < 2$.

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $e^{3x} - 1 + \alpha x + \beta \log(1 - x) = 2x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\log(1 + x)$ si ha

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\log(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$e^{3x} - 1 + \alpha x + \beta \log(1 - x) = (3 + \alpha - \beta)x + \left(\frac{9}{2} - \frac{\beta}{2} \right)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $3 + \alpha - \beta = 0$ e $\frac{9}{2} - \frac{\beta}{2} = 2$, cioè $\alpha = 2$ e $\beta = 5$.

3 - Calcolare l'integrale $\int_2^3 \max\{1, \log x\} dx$.

Grazie al fatto che $\log x \geq 1$ per $x \geq e$, si ha

$$\int_2^3 \max\{1, \log x\} dx = \int_2^e dx + \int_e^3 \log x dx = e - 2 + [x \log x - x]_e^3 = e - 5 + 3 \log 3,$$

tenendo conto che la primitiva di $\log x$ si ottiene integrando per parti.

4 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y = e^{3x} \\ y(0) = \frac{1}{5}, y'(0) = \frac{3}{5} \end{cases}$.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

(i) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 4 = 0, \quad \lambda = \pm 2.$$

Utilizzando il metodo *ad hoc*, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + a e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ si deve determinare in modo che la funzione $\tilde{y}(x) = a e^{3x}$ risulti una soluzione di $y'' - 4y = e^{3x}$. Infatti, poiché

$$\tilde{y}'(x) = 3a e^{3x} \quad \tilde{y}''(x) = 9a e^{3x},$$

imponendo che $\tilde{y}(x) = a e^{3x}$ sia soluzione di $y'' - 4y = e^{3x}$, si ottiene che a deve verificare la condizione

$$9a - 4a = 1,$$

cioè $a = \frac{1}{5}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = \frac{1}{5}$ e $y'(0) = \frac{3}{5}$ si ricavano i valori delle costanti arbitrarie, precisamente $C_1 = C_2 = 0$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{3x}.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x}y(x) = \frac{1}{5}e^{(\alpha+3)x}$$

si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\alpha x}y(x) = 0$ se $\alpha + 3 > 0$, cioè $\alpha > -3$.

5 - Data la funzione $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+3}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

La funzione è definita per $x \neq -3$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

e quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale mentre la retta $x = -3$ è asintoto verticale per f .

La derivata di f è data da

$$f'(x) = e^{2x} \frac{2(x+3) - 1}{(x+3)^2} = e^{2x} \frac{2x+5}{(x+3)^2} \quad x \neq -3.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $(-\infty, -3)$ e in $(-3, -\frac{5}{2})$, mentre è crescente in $(-\frac{5}{2}, +\infty)$.

Pertanto, $f(-\frac{5}{2}) = 2e^{-5}$ è un minimo relativo per f .

La derivata seconda di f è data da

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{2x} \frac{2x+5}{(x+3)^2} + e^{2x} \frac{2(x+3)^2 - 2(x+3)(2x+5)}{(x+3)^4} = 2e^{2x} \frac{2x+5}{(x+3)^2} + 2e^{2x} \frac{x+3-2x-5}{(x+3)^3} \\ &= 2e^{2x} \frac{(2x+5)(x+3) - x - 2}{(x+3)^3} = 2e^{2x} \frac{2x^2 + 10x + 13}{(x+3)^3} \quad x \neq -3. \end{aligned}$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(-\infty, -3)$, mentre è convessa in $(-3, +\infty)$.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

