

1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\beta x) - 1 - 3x = -2x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ si ha

$$\operatorname{sen}(\alpha x) = \alpha x + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\cos(\beta x) = 1 - \frac{\beta^2}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\beta x) - 1 - 3x = (\alpha - 3)x - \frac{\beta^2}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\alpha - 3 = 0$ e $-\frac{\beta^2}{2} = -2$, cioè $\alpha = 3$ e $\beta = \pm 2$.

2 - Calcolare l'integrale $\int_0^1 x(1-x^2)^6 dx$.

$$\int_0^1 x(1-x^2)^6 dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x)(1-x^2)^6 dx = -\frac{1}{14} [(1-x^2)^7]_0^1 = \frac{1}{14}.$$

3 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y' + y = e^x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1/2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Utilizzando il metodo *ad hoc*, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + Ce^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dove $C \in \mathbb{R}$ si deve determinare in modo che la funzione $\tilde{y}(x) = Ce^x$ risulti una soluzione di $y'' - y' + y = e^x$. Infatti, poiché

$$\tilde{y}'(x) = \tilde{y}''(x) = Ce^x,$$

imponendo che $\tilde{y}(x) = Ce^x$ sia soluzione di $y'' - y' + y = e^x$, si ottiene che $C = 1$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 1$ si ricavano i valori delle costanti arbitrarie, precisamente $C_1 = C_2 = 0$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^x.$$

Si può giungere alla stessa conclusione in un altro modo. Infatti, dall'espressione dell'equazione differenziale assegnata risulta evidente che la funzione $y(x) = e^x$ è soluzione di $y'' - y' + y = e^x$; inoltre, verifica anche le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 1$, e di conseguenza, grazie all'unicità della soluzione del problema di Cauchy, $y(x) = e^x$ è proprio la soluzione richiesta.

4 - Stabilire il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + 2^{-n})$.

La serie assegnata è a termini positivi.

Per lo sviluppo di Maclaurin di $\log(1+x)$ si ha

$$\log(1 + 2^{-n}) = 2^{-n} + o(2^{-n}) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ che converge perchè $\frac{1}{2} < 1$. In conclusione, la serie assegnata è convergente.

5 - Data la funzione $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

La funzione è definita per ogni $x \neq -1$.

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

e di conseguenza $x = -1$ è asintoto verticale e $y = 0$ è asintoto orizzontale per f .

La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+1) - \sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-2x}{3x^{2/3}(x+1)^2} \quad x \neq -1, 0.$$

Si osservi che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty,$$

e di conseguenza f non è derivabile in 0.

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, 1/2)$, mentre è decrescente in $(1/2, +\infty)$.

Pertanto, $f(1/2) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ è un massimo relativo per f .

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

