1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\quad \alpha x + e^{-x} + \beta \log(1+2x) - 1 = x^2 + o(x^2) \quad$ per $\ x \to 0$.

. . . .

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\log(1+x)$ si ha

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

e quindi

$$\alpha x + e^{-x} + \beta \log(1+2x) - 1 = (\alpha - 1 + 2\beta)x + \Big(\frac{1}{2} - 2\beta\Big)x^2 + o(x^2) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\alpha - 1 + 2\beta = 0$ e $\frac{1}{2} - 2\beta = 1$, cioè $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{4}$.

---

2 - Calcolare la derivata della funzione $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \sqrt[3]{t^5 - 1}\; dt \quad$ nel punto $x_0 = 1$.

. . . .

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = e^x \sqrt[3]{e^{5x} - 1}\,,$$

e di conseguenza $F'(1) = e\sqrt[3]{e^5 - 1}$.

---

3 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\quad \begin{cases} y' = xy - 4x \\ y(3) = 4\,. \end{cases}$

. . . .

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si deve calcolare l'integrale

$$-4\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\; dx = 4e^{-\frac{x^2}{2}}\,,$$

e di conseguenza l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 4 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(3) = 4$ si ha che la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = 4.$$

---

4 - Stabilire per quali valori del parametro $x > 0$ la serie $\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{\sqrt{n-1}} \quad$ è convergente.

. . . .

La serie non è a termini di segno costante. Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ha

$$\frac{|\log x|^{n+1}}{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{n-1}}{|\log x|^n} = |\log x|\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\log x|\,.$$

Poiché $|\log x| < 1$ per $e^{-1} < x < e$ la serie converge assolutamente per $x \in (e^{-1}, e)$. Inoltre, se $|\log x| = 1$ allora $x = e^{-1}$ o $x = e$; di conseguenza le corrispondenti serie sono rispettivamente $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}$, che converge per il criterio di Leibniz, e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, che diverge positivamente per confronto con la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Si osservi anche che per $x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$ si ha $|\log x| > 1$, e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\log x|^n}{\sqrt{n-1}} = +\infty\,.$$

Pertanto la condizione necessaria alla convergenza non è verificata, e di conseguenza la serie non converge per $x \in \mathbb{R}$, $|\log x| > 1$.
In conclusione la serie assegnata converge se e solo se $x \in [e^{-1}, e)$.

---

5 - Data la funzione $f(x) = x^2 \log|x|$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. La funzione è pari, e quindi basta studiarla per $x > 0$.
Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

La derivata di f è data da

$$f'(x) = 2x\log x + \frac{x^2}{x} = x(2\log x + 1) \qquad x > 0\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $(0, e^{-1/2})$, mentre è crescente in $(e^{-1/2}, +\infty)$. Pertanto, $f(e^{-1/2}) = -\dfrac{e^{-1}}{2}$ è il minimo assoluto per f.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = 2\log x + 1 + 2 = 2\log x + 3 \qquad x > 0\,.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(0, e^{-3/2})$, mentre è convessa in $(e^{-3/2}, +\infty)$, e quindi $x = e^{-3/2}$ è punto di flesso per f.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.