

1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\alpha \log(1-x^2) + \cos(2x) + \beta = -6x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\log(1+x)$ e $\cos x$ si ha

$$\log(1-x^2) = -x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$\alpha \log(1-x^2) + \cos(2x) + \beta = 1 + \beta - (\alpha + 2)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $1 + \beta = 0$ e $-(\alpha + 2) = -6$, cioè $\alpha = 4$ e $\beta = -1$.

2 - Calcolare l'integrale $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$.

Integrando per parti si ha

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} [x^2 e^{x^2}]_0^1 - \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

3 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 3x \\ y(0) = \frac{2}{3}, y'(0) = -1. \end{cases}$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può utilizzare il metodo *ad hoc*, cioè trovare una soluzione particolare nella forma $\tilde{y}(x) = Ax + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare. Infatti per $A = -1$ e $B = \frac{2}{3}$ la funzione $\tilde{y}(x) = -x + \frac{2}{3}$ è soluzione di $y'' - 2y' - 3y = 3x$ e quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{2}{3} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = \frac{2}{3}$ e $y'(0) = -1$ si ha che la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(x) = \frac{2}{3} - x.$$

4 - Stabilire il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^{\pi/3}}$.

La serie assegnata è a termini positivi, in quanto $0 < \frac{1}{n^{\pi/3}} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Per lo sviluppo di Maclaurin di $\sin x$ si ha

$$\sin \frac{1}{n^{\pi/3}} = \frac{1}{n^{\pi/3}} + o\left(\frac{1}{n^{\pi/3}}\right) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi/3}}$ che converge perchè $\pi/3 > 1$. In conclusione, la serie assegnata è convergente.

5 - Data la funzione $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x+2}}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

La funzione è definita per ogni $x > -2$.

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

e di conseguenza la retta di equazione $x = -2$ è asintoto verticale.

La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{2(x+2)e^x - e^x}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{e^x(2x+3)}{2(x+2)^{3/2}} \quad x > -2.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-3/2, +\infty)$, mentre è decrescente in $(-2, -3/2)$. Pertanto, $f(-3/2) = \sqrt{2}e^{-3/2}$ è il minimo assoluto per f .

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \frac{e^x(4x^2 + 12x + 11)}{4(x+2)^{5/2}} \quad x > -2.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è convessa in tutto l'intervallo $(-2, +\infty)$.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

