

1 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^\alpha}{\sqrt[4]{n}} \cos \frac{1}{n}$ è convergente.

La serie è a termini positivi, in quanto $\cos \frac{1}{n} > 0$ per ogni $n \geq 1$. Si osservi che

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cos \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} (1 + o(1)) \quad n \rightarrow +\infty,$$

e di conseguenza, poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ diverge positivamente, per il criterio del confronto asintotico si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cos \frac{1}{n} = +\infty.$$

Pertanto la serie assegnata è sempre divergente, in quanto o somma di due serie divergenti positivamente o somma di una serie divergente e di una convergente. In conclusione, non esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge.

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\alpha \log(1+2x) + x \cos(3x) - x^2 + \beta x^3 = -\frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\log(1+x)$ e $\cos x$ si ha

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$\alpha \log(1+2x) + x \cos(3x) - x^2 + \beta x^3 = (2\alpha + 1)x - (2\alpha + 1)x^2 + \left(\frac{8}{3}\alpha - \frac{9}{2} + \beta\right)x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $2\alpha + 1 = 0$ e $\frac{8}{3}\alpha - \frac{9}{2} + \beta = -\frac{9}{2}$, cioè $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{4}{3}$.

3 - Calcolare l'integrale $\int_0^{\pi/2} e^{\cos^2 x} \sin(2x) dx$.

Si noti che

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos^2 x} \sin(2x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} e^{\cos^2 x} \sin x \cos x dx = - \int_0^{\pi/2} e^{\cos^2 x} D(\cos^2 x) dx = -[e^{\cos^2 x}]_0^{\pi/2} = e - 1.$$

4 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} y - e^{\sqrt{x}} & x > 0 \\ y(1) = -e \end{cases}$.

(ii) Dimostrare che esiste una funzione u di classe $C^1([0, \infty))$ tale che $u(x) = y(x)$ per ogni $x > 0$.

(i) L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. L'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(x) = C e^{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione differenziale, si deve utilizzare il metodo di variazione della costante. A tal fine si deve calcolare

$$\int e^{-\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = x.$$

Pertanto, una soluzione particolare è data da $\tilde{y}(x) = -x e^{\sqrt{x}}$; di conseguenza l'integrale generale dell'equazione differenziale completa è

$$y(x) = e^{\sqrt{x}}(C - x), \quad x \in (0, +\infty), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = -e$ si ottiene $C = 0$. In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -xe^{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

(ii) Si osservi che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} y(x) - e^{\sqrt{x}} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + 1 \right) = -1,$$

e di conseguenza la funzione $u(x)$ è definita da

$$u(x) = \begin{cases} -xe^{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

5 - Data la funzione $f(x) = \frac{x+2}{\log(x+2)}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione è definita per $x > -2$ e $x \neq -1$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{\log(x+2) - 1}{(\log(x+2))^2} \quad x > -2, \quad x \neq -1.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f'(x) = 0.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $(-2, -1)$ e in $(-1, e-2)$, mentre è crescente in $(e-2, +\infty)$. Pertanto, $f(e-2) = e$ è un minimo locale per f .

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \frac{2 - \log(x+2)}{(x+2)(\log(x+2))^3} \quad x > -2, \quad x \neq -1.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(-2, -1)$ e in $(e^2-2, +\infty)$, mentre è convessa in $(-1, e^2-2)$, e di conseguenza e^2-2 è punto di flesso.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

