

1 - Stabilire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (3 + 3x + x^2)^n$ è convergente, e in tal caso determinare la somma della serie.

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $3 + 3x + x^2 > 0$. Pertanto la serie è convergente per $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$3 + 3x + x^2 < 1,$$

cioè $-2 < x < -1$.

La somma della serie è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3 + 3x + x^2)^n = \frac{1}{1 - (3 + 3x + x^2)} - 1 = -\frac{3 + 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}, \quad -2 < x < -1.$$

2 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $2 + 9x^2 + \alpha x^3 - 2e^{3x} + \beta \sin(2x) = -9x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\sin x$ si ha

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{3^3 x^3}{3!} + o(x^3) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

$$\sin(2x) = 2x - \frac{2^3 x^3}{3!} + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$2 + 9x^2 + \alpha x^3 - 2e^{3x} + \beta \sin(2x) = (2\beta - 6)x + \left(\alpha - \frac{4}{3}\beta - 9\right)x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $2\beta - 6 = 0$ e $\alpha - \frac{4}{3}\beta - 9 = -9$, cioè $\beta = 3$ e $\alpha = 4$.

3 - Calcolare l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x \, dx$.

Grazie al fatto che la funzione integranda è pari, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi} |x| \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi} x \cos x \, dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -2,$$

e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x \, dx = -4.$$

4 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 3y' = e^{-2x} \\ y(0) = -\frac{1}{6}, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$.

(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

(i) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0, \quad \lambda = 0 \quad \lambda = -3.$$

Utilizzando il metodo *ad hoc*, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} + a e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ si deve determinare in modo che la funzione $\tilde{y}(x) = a e^{-2x}$ risulti una soluzione di $y'' + 3y' = e^{-2x}$. Infatti, poiché

$$\tilde{y}'(x) = -2a e^{-2x} \quad \tilde{y}''(x) = 4a e^{-2x},$$

imponendo che $\tilde{y}(x) = ae^{-2x}$ sia soluzione di $y'' + 3y' = e^{-2x}$, si ottiene che a deve verificare la condizione

$$4a - 6a = 1,$$

cioè $a = -\frac{1}{2}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2} e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = -\frac{1}{6}$ e $y'(0) = 0$ si ricavano i valori delle costanti arbitrarie, precisamente $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{1}{3}$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x} y(x) = \frac{1}{3} e^{(\alpha-3)x} - \frac{1}{2} e^{(\alpha-2)x}$$

si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$ se $\alpha - 3 < 0$ e $\alpha - 2 < 0$, cioè $\alpha < 2$.

Si giunge alle stesse conclusioni se si pone $v = y'$ e si risolve l'equazione differenziale del primo ordine $v' + 3v = e^{-2x}$.

5 - Data la funzione $f(x) = \sqrt{x}(1 - 2 \log x)$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione è definita per $x > 0$. I limiti agli estremi del dominio sono:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \log x}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x} = -\frac{2 \log x + 3}{2\sqrt{x}} \quad x > 0.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(0, e^{-3/2})$, mentre è decrescente in $(e^{-3/2}, +\infty)$. Pertanto, $f(e^{-3/2}) = 4e^{-3/4}$ è il massimo assoluto per f .

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = -\frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2 \log x + 3}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{2 \log x - 1}{4x^{3/2}} \quad x > 0.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(0, \sqrt{e})$, mentre è convessa in $(\sqrt{e}, +\infty)$, e di conseguenza $\sqrt{e}$ è punto di flesso.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

