1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\quad \alpha \operatorname{sen} x - x\cos x + \beta x^3 = -x^3 + o(x^3) \quad$ per $\; x \to 0$.

....

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ si ha

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

$$x\cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

e quindi

$$\alpha \operatorname{sen} x - x\cos x + \beta x^3 = (\alpha - 1)x + \Big(-\frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2} + \beta\Big)x^3 + o(x^3) \qquad \text{per} \quad x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\alpha - 1 = 0$ e $-\dfrac{\alpha}{6} + \dfrac{1}{2} + \beta = -1$, cioè $\alpha = 1$ e $\beta = -\dfrac{4}{3}$.

---

2 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{2}} x^2 e^{-x^3}\, dx$.

....

Si osservi che

$$\int_0^{\sqrt[3]{2}} x^2 e^{-x^3}\, dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt[3]{2}} (-3x^2)e^{-x^3}\, dx = -\frac{1}{3}\big[e^{-x^3}\big]_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{1-e^{-2}}{3}\,.$$

---

3 - Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' + \alpha y = e^{\pi x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$

....

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{-\alpha x} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Si cerca una soluzione particolare della forma

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} \beta e^{\pi x} & \text{se } \alpha \neq -\pi \\ \beta x e^{\pi x} & \text{se } \alpha = -\pi\,, \end{cases}$$

dove $\beta \in \mathbb{R}$ è da determinare; di conseguenza si ottiene

$$\widetilde{y}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi + \alpha}e^{\pi x} & \text{se } \alpha \neq -\pi \\[2ex] x e^{\pi x} & \text{se } \alpha = -\pi\,. \end{cases}$$

Pertanto l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{-\alpha x} + \frac{1}{\pi + \alpha}e^{\pi x} \qquad \alpha \neq -\pi,\ C \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = e^{\pi x}\big(C + x\big) \qquad \alpha = -\pi,\ C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ha che la soluzione del problema di Cauchy assegnato è data da

$$y(x) = \frac{\pi + \alpha - 1}{\pi + \alpha}e^{-\alpha x} + \frac{1}{\pi + \alpha}e^{\pi x} \qquad \alpha \neq -\pi,$$

$$y(x) = e^{\pi x}\big(1 + x\big) \qquad \alpha = -\pi.$$

---

4 - Stabilire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\cos x}$ è convergente e calcolarne la somma.

....

La serie assegnata è una coda della serie geometrica di ragione $e^{\cos x}$. Pertanto converge se e solo se $e^{\cos x} < 1$, cioè $\cos x < 0$, e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La somma della serie è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\cos x} = \frac{1}{1-e^{\cos x}} - 1 = \frac{e^{\cos x}}{1-e^{\cos x}}\,, \qquad \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

---

5 - Data la funzione $f(x) = e^{|x-1|} + 2x$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{1-x} + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(e + 2xe^{x}\right) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{x-1} + 2x\right) = +\infty\,.$$

La derivata di f è data da

$$f'(x) = e^{|x-1|}\frac{|x-1|}{x-1} + 2 = \begin{cases} -e^{1-x} + 2 & \text{se } x < 1, \\ e^{x-1} + 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si osservi che

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = 1 \neq 3 = \lim_{x\to1^+} f'(x),$$

e di conseguenza f non è derivabile in 1.
Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $(-\infty, 1-\log 2)$, mentre è crescente in $(1-\log 2, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Pertanto, $f(1-\log 2) = 4 - 2\log 2$ è minimo assoluto. Si noti che $1 - \log 2 > 0$, in quanto $e > 2$.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} e^{1-x} & \text{se } x < 1, \\ e^{x-1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è convessa in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.