1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\quad \alpha x\log(1-2x)+\beta x^2 = 3x^3+o(x^3) \quad$ per $\; x\to 0\,.$

....

Per lo sviluppo di Maclaurin di $\log(1+x)$ si ha

$$\log(1-2x) = -2x-2x^2+o(x^2) \qquad\qquad \text{per} \quad x\to 0\,,$$

e quindi

$$\alpha x\log(1-2x)+\beta x^2 = (\beta-2\alpha)x^2-2\alpha x^3+o(x^3) \qquad \text{per} \;\; x\to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\beta-2\alpha=0$ e $-2\alpha=3$, cioè $\alpha=-\dfrac{3}{2}$ e $\beta=-3$.

---

2 - Calcolare l'integrale $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1+6x^2}}\,dx.$

....

Si osservi che

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1+6x^2}}\,dx = \frac{1}{12}\int_0^1 12x(1+6x^2)^{-1/3}\,dx = \frac{1}{8}\Big[(1+6x^2)^{2/3}\Big]_0^1 = \frac{7^{2/3}-1}{8}\,.$$

---

3 - (a) Al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y''+2y'=0 \\ y(0)=\alpha, \quad y'(0)=-4. \end{cases}$

(b) Stabilire per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ la soluzione $y(x)$ verifica la condizione $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x y(x)=0\,.$

....

(a) L'integrale generale dell'equazione è dato da

$$y(x)=C_1+C_2e^{-2x} \qquad C_1, C_2\in\mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0)=\alpha$ e $y'(0)=-4$ si ha $C_1=\alpha-2$ e $C_2=2$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy assegnato è data da

$$y(x)=\alpha-2+2e^{-2x}.$$

(b) Si osservi che

$$e^x y(x)=(\alpha-2)e^x+2e^{-x},$$

e di conseguenza la condizione $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x y(x)=0$ è verificata solo per $\alpha=2$.

---

4 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ la serie $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^2-4}}{n^\alpha} \quad$ è convergente.

....

La serie è definitivamente a termini positivi, in quanto $\sqrt[5]{n^2-4}>0$ per ogni $n\ge 3$. Si osservi che

$$\frac{\sqrt[5]{n^2-4}}{n^\alpha} = \frac{\sqrt[5]{1-4n^{-2}}}{n^{\alpha-2/5}} = \frac{1}{n^{\alpha-2/5}}(1+o(1)) \qquad n\to+\infty\,,$$

e di conseguenza per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-2/5}}$. Pertanto la serie converge se e solo se $\alpha-\dfrac{2}{5}>1$, cioè $\alpha>\dfrac{7}{5}$.

---

5 - Data la funzione $\quad f(x)=|x-2|-x\log x \quad$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

....

La funzione è definita per ogni $x>0$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=2\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\big(1-\frac{2}{x}-\log x\big)=-\infty\,,$$

e di conseguenza f può essere estesa per continuità in 0 ponendo $f(0)=2$.
La derivata di f è data da

$$f'(x)=\frac{|x-2|}{x-2}-\log x-1=\begin{cases} -2-\log x & \text{se } 0<x<2 \\ -\log x & \text{se } x>2 \end{cases}$$

Si noti che

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -2 - \log 2 \neq -\log 2 = \lim_{x\to 2^+} f'(x),$$

e di conseguenza f non è derivabile in 2.
Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(0, e^{-2})$, mentre è decrescente in $(e^{-2}, 2)$ e in $(2, +\infty)$. Pertanto, $f(e^{-2}) = 2 + e^{-2}$ è massimo assoluto e $f(0) = 2$ è minimo locale per f.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = -\frac{1}{x} \qquad x > 0\,, \quad x \neq 2\,.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(0, 2)$ e in $(2, +\infty)$.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.