

1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $e^{2\sqrt{x}} - 1 + \alpha\sqrt{x} + \beta \log(1+x) = -5x + o(x)$ per $x \rightarrow 0^+$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\log(1+x)$ si ha

$$e^{2\sqrt{x}} = 1 + 2\sqrt{x} + 2x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

$$\log(1+x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e quindi

$$e^{2\sqrt{x}} - 1 + \alpha\sqrt{x} + \beta \log(1+x) = (2+\alpha)\sqrt{x} + (2+\beta)x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $2+\alpha=0$ e $2+\beta=-5$, cioè $\alpha=-2$ e $\beta=-7$.

2 - Calcolare l'integrale $\int_0^\pi \cos^2(3x) dx$.

Integrando per parti, si ha

$$\int_0^\pi \cos^2(3x) dx = \int_0^\pi D\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right) \cos(3x) dx = \left[\frac{\sin(3x)}{3} \cos(3x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin^2(3x) dx = \int_0^\pi (1 - \cos^2(3x)) dx,$$

e di conseguenza

$$2 \int_0^\pi \cos^2(3x) dx = \int_0^\pi dx = \pi,$$

da cui

$$\int_0^\pi \cos^2(3x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

In altro modo, grazie alla formula $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, si ha

$$\cos^2(3x) = \frac{1}{2}(\cos(6x) + 1),$$

e quindi

$$\int_0^\pi \cos^2(3x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(6x) + 1) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(6x)}{6} + x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

3 - (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + y' - 6y = e^x$.

(b) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ ogni soluzione $y(x)$ di $y'' + y' - 6y = e^x$ verifica la condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0.$$

(a) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può utilizzare il metodo *ad hoc*, cioè trovare una soluzione particolare nella forma $\tilde{y}(x) = C e^x$, con $C \in \mathbb{R}$ da determinare. Infatti per $C = -\frac{1}{4}$ la funzione $\tilde{y}(x) = -\frac{1}{4} e^x$ è soluzione di $y'' + y' - 6y = e^x$ e quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{4} e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Si osservi che

$$e^{\alpha x} y(x) = e^{(\alpha+2)x} \left(C_1 + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{4} e^{-x} \right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

e quindi la condizione $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$ è verificata per ogni $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ solo per $\alpha < -2$.

4 - Stabilire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (\sin x)^n$ è convergente e calcolarne la somma.

La serie assegnata è una coda della serie geometrica di ragione $\sin x$, e quindi converge se $|\sin x| < 1$, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La somma della serie è data da

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\sin x)^n = \frac{1}{1 - \sin x} - 1 - \sin x = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5 - Data la funzione $f(x) = xe^{-\sqrt{x+3}}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione. (Non è richiesto lo studio della convessità).

La funzione è definita per ogni $x \geq -3$.

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = f(-3) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

e di conseguenza la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale.

La derivata di f è data da

$$f'(x) = e^{-\sqrt{x+3}} \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{x+3}} \right) \quad x > -3.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) = +\infty,$$

e di conseguenza f non è derivabile a destra in -3 .

Per quanto riguarda il segno di f' , per $-3 < x \leq 0$ si ha $f'(x) > 0$. Invece, se $x > 0$ si ha $f'(x) > 0$ per $2\sqrt{x+3} > x$, cioè $x^2 - 4x - 12 < 0$, e quindi $0 < x < 6$. Pertanto, dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-3, 6)$, mentre è decrescente in $(6, +\infty)$. Pertanto, $f(6) = 6e^{-3}$ è massimo assoluto e $f(-3) = -3$ è minimo assoluto per f .

Un grafico approssimativo di f è il seguente.

