1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\sinh(3x) + \alpha \sin(x) + \beta x^3 = 2x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\sinh x$ e $\sin x$ si ha

$$\sinh(3x) = 3x + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

e quindi

$$\sinh(3x) + \alpha \sin x + \beta x^3 = (3+\alpha)x + \Big(\frac{9}{2} - \frac{\alpha}{6} + \beta\Big)x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $3 + \alpha = 0$ e $\frac{9}{2} - \frac{\alpha}{6} + \beta = 2$, cioè $\alpha = \beta = -3$.

---

2 - Calcolare la derivata della funzione $F(x) = \displaystyle\int_1^{2\log x} e^{-t^2}\, dt$ nel suo dominio di definizione.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale e per il teorema sulla derivata della funzione composta si ha

$$F'(x) = \frac{2}{x} e^{-4\log^2 x} \quad x > 0\,.$$

---

3 - Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2\cos(2x)y - \cos(2x) \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$.

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = Ce^{\operatorname{sen}(2x)} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si deve utilizzare il metodo di variazione della costante. A tal fine, si deve determinare una primitiva di $-\cos(2x)e^{-\operatorname{sen}(2x)}$, e quindi

$$-\int \cos(2x) e^{-\operatorname{sen}(2x)}\, dx = \frac{1}{2} e^{-\operatorname{sen}(2x)}\,.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$y(x) = Ce^{\operatorname{sen}(2x)} + \frac{1}{2} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(\pi) = 1$ si ricava il valore della costante arbitraria, precisamente $C = \frac{1}{2}$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{\operatorname{sen}(2x)} + \frac{1}{2}\,.$$

---

4 - Stabilire per quali valori del parametro $x > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{(\log x)^n}$ è convergente.

La serie non è a termini di segno costante. Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ha

$$\frac{(n+1)2^{n+1}}{|\log x|^{n+1}} \frac{|\log x|^n}{n2^n} = \frac{n+1}{n} \frac{2}{|\log x|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{|\log x|}\,.$$

Poiché $\dfrac{2}{|\log x|} < 1$ per $0 < x < e^{-2}$ o $x > e^2$ la serie converge assolutamente per $x \in (0, e^{-2}) \cup (e^2, +\infty)$. Inoltre, poiché $\dfrac{2}{|\log x|} = 1$ per $x = e^{-2}$ o $x = e^2$, si ha che le corrispondenti serie sono rispettivamente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n$, che non convergono. Si osservi anche che per $x \in (e^{-2}, 1) \cup (1, e^2)$ si ha $\dfrac{2}{|\log x|} > 1$; di conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n2^n}{|\log x|^n} = \lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{2}{|\log x|}\Big)^n = +\infty\,,$$

e quindi, poichè la condizione necessaria alla convergenza non è verificata, la serie non può convergere.
In conclusione la serie assegnata converge per $x \in (0, e^{-2}) \cup (e^2, +\infty)$.

---

5 - Data la funzione $f(x) = |x-1| - 5\arctan x$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . . . .

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e può essere scritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x - 5\arctan x & \text{se } x \le 1 \\ \\ x - 1 - 5\arctan x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1 - x - 5\arctan x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - 1 - 5\arctan x) = +\infty\,.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{1 - 5\arctan x}{x} - 1\Big) = -1\,, \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty}(1 - 5\arctan x) = 1 + \frac{5\pi}{2}\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\Big(1 - \frac{1 + 5\arctan x}{x}\Big) = 1\,, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}(-1 - 5\arctan x) = -1 - \frac{5\pi}{2}\,,$$

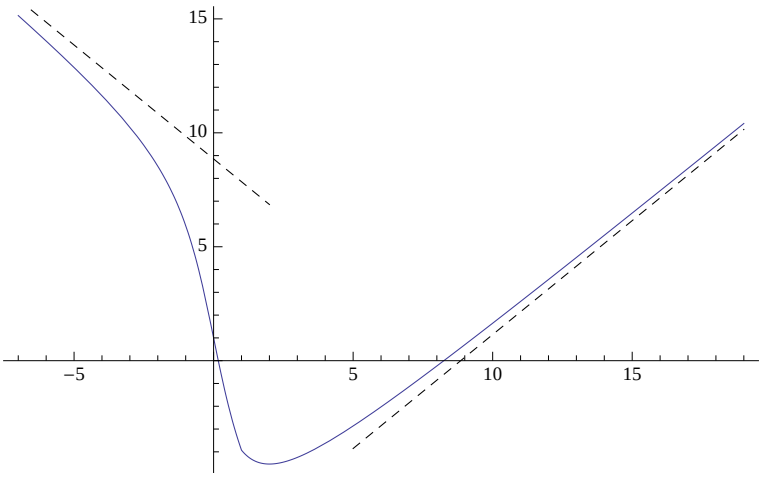
e di conseguenza la retta di equazione $y = 1 - x + \dfrac{5\pi}{2}$ è asintoto obliquo a $-\infty$, mentre la retta di equazione $y = x - 1 - \dfrac{5\pi}{2}$ è asintoto obliquo a $+\infty$.
La derivata di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{5}{1+x^2} & \text{se } x < 1 \\ \\ 1 - \dfrac{5}{1+x^2} = \dfrac{x^2-4}{1+x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si noti che

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = -\frac{7}{2}, \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = -\frac{3}{2},$$

e di conseguenza $f'_-(1) = -\dfrac{7}{2} \neq -\dfrac{3}{2} = f'_+(1)$, cioè f non è derivabile in 1. Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, 2)$, mentre è crescente in $(2, +\infty)$. Pertanto, $f(2) = 1 - 5\arctan 2$ è minimo assoluto per f.
La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \frac{10x}{(1+x^2)^2} \qquad x \neq 1\,.$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(-\infty, 0)$, mentre è convessa in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$, e quindi 0 è punto di flesso e $f(0) = 1$.
Un grafico approssimativo di f è il seguente, tenendo conto che $f(2) < f(1) = -\dfrac{5\pi}{4} < 0$.