1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\quad e^{2x} - \cos\sqrt{x} + \alpha x + \beta x^2 = -\dfrac{x^2}{24} + o(x^2) \quad$ per $\; x \to 0^+$.

. . . . . .

Per gli sviluppi di Maclaurin di e^x e $\cos x$ si ha

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } \; x \to 0\,,$$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2) \qquad \text{per } \; x \to 0^+\,,$$

e quindi

$$e^{2x} - \cos\sqrt{x} + \alpha x + \beta x^2 = \Big(\frac{5}{2} + \alpha\Big)x + \Big(2 - \frac{1}{24} + \beta\Big)x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } \; x \to 0^+\,.$$

Pertanto la condizione assegnata è verificata se $\dfrac{5}{2} + \alpha = 0$ e $2 - \dfrac{1}{24} + \beta = -\dfrac{1}{24}$, cioè $\alpha = -\dfrac{5}{2}$ e $\beta = -2$.

---

2 - Calcolare $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}} e^{\sqrt{3x+2}}\, dx$.

. . . . . .

Integrando per sostituzione, si pone $t = \sqrt{3x+2}$, e quindi $x = \dfrac{t^2-2}{3}$ e $dx = \dfrac{2}{3}t dt$. Pertanto, integrando anche per parti, si ha

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}} e^{\sqrt{3x+2}}\, dx = \frac{2}{3}\int_0^1 te^t\, dt = \frac{2}{3}\big[te^t - e^t\big]_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

---

3 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 2\sqrt{3}y' + 3y = 9x \\ y(0) = -\sqrt{3},\ y'(0) = 1 \end{cases}$.
(ii) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

. . . . . .

(i) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 + 2\sqrt{3}\lambda + 3 = 0\,, \qquad (\lambda + \sqrt{3})^2 = 0\,, \qquad \lambda = -\sqrt{3}.$$

Utilizzando il metodo *ad hoc*, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x\sqrt{3}} + ax + b, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ si devono determinare in modo che la funzione $\widetilde{y}(x) = ax + b$ risulti una soluzione di $y'' + 2\sqrt{3}y' + 3y = 9x$. Infatti, poiché

$$\widetilde{y}'(x) = a \qquad \widetilde{y}''(x) = 0\,,$$

imponendo che $\widetilde{y}(x) = ax + b$ sia soluzione di $y'' + 2\sqrt{3}y' + 3y = 9x$, si ottiene che a, b devono verificare la condizione

$$2\sqrt{3}a + 3ax + 3b = 9x\,,$$

cioè $a = 3$ e $b = -2\sqrt{3}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x\sqrt{3}} + 3x - 2\sqrt{3}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = -\sqrt{3}$ e $y'(0) = 1$ si ricavano i valori delle costanti arbitrarie, precisamente $C_1 = \sqrt{3}$ e $C_2 = 1$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = (x + \sqrt{3})e^{-x\sqrt{3}} + 3x - 2\sqrt{3}\,.$$

(ii) In forza di

$$e^{\alpha x} y(x) = (x + \sqrt{3})e^{(\alpha - \sqrt{3})x} + e^{\alpha x}(3x - 2\sqrt{3})$$

si ha $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$ se $\alpha - \sqrt{3} > 0$ e $\alpha > 0$, cioè $\alpha > \sqrt{3}$.

4 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(e^{1/n^\alpha} - 1\right)$ è convergente.

La serie è a termini positivi, in quanto $e^{\frac{1}{n^\alpha}} > 1$ per ogni $n \geq 1$. Grazie al limite notevole $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, per ogni $\alpha > 0$ si ha $e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1 = \dfrac{1}{n^\alpha}(1 + o(1))$, $n \to +\infty$, e di conseguenza

$$\sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right) = \frac{1}{n^{\alpha - \frac{1}{2}}}(1 + o(1)) \qquad n \to +\infty\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ convergente per $\alpha - \dfrac{1}{2} > 1$, cioè $\alpha > \dfrac{3}{2}$. In conclusione, la serie assegnata è convergente solo se $\alpha > \dfrac{3}{2}$.

---

5 - Data la funzione $f(x) = 2x^2 - |1 + \log x|$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità gli intervalli di monotonia, eventuali punti di minimo e di massimo, gli intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione è definita per $x > 0$ e può essere scritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 + \log x & \text{se } 0 < x \leq e^{-1} \\ 2x^2 - 1 - \log x & \text{se } x > e^{-1}. \end{cases}$$

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x^2 + 1 + \log x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (2x^2 - 1 - \log x) = \lim_{x\to +\infty} x^2\Big(2 - \frac{1 + \log x}{x^2}\Big) = +\infty\,,$$

di conseguenza la retta $x = 0$ è asintoto verticale per f. La derivata di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x < e^{-1} \\ 4x - \dfrac{1}{x} & \text{se } x > e^{-1}. \end{cases}$$

Si noti

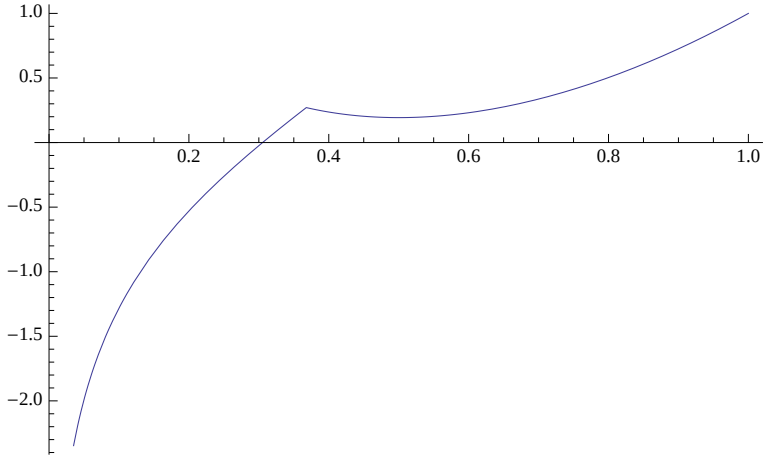
$$\lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f'(x) = 4e^{-1} + e, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{e}^+} f'(x) = 4e^{-1} - e,$$

e di conseguenza $f'_-(e^{-1}) = 4e^{-1} + e \neq 4e^{-1} - e = f'_+(e^{-1})$, cioè f non è derivabile in e^{-1}.

Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(0, e^{-1})$ e in $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, mentre è decrescente in $\left(e^{-1}, \dfrac{1}{2}\right)$. Pertanto, $f(e^{-1}) = 2e^{-2}$ è un massimo locale per f, mentre $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \log 2 - \dfrac{1}{2}$ è un minimo locale per f.

La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = \begin{cases} 4 - \dfrac{1}{x^2} & \text{se } 0 < x < e^{-1} \\ 4 + \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > e^{-1}. \end{cases}$$

Dallo studio del segno di f'' segue che f è concava in $(0, e^{-1})$, mentre è convessa in $(e^{-1}, +\infty)$. Si noti che e^{-1} non è punto di flesso perchè non esiste la retta tangente al grafico di f in $(e^{-1}, f(e^{-1}))$.

Un grafico approssimativo di f è il seguente, tenendo conto che $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \log 2 - \dfrac{1}{2} > 0$, in quanto $2\log 2 = \log 4 > 1$.