

1 - Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\log(1 - 3\sqrt{x})}$.

Grazie a

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} t &= t(1 + o(1)) & t \rightarrow 0, \\ \log(1 + t) &= t(1 + o(1)) & t \rightarrow 0,\end{aligned}$$

si ha

$$\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\log(1 - 3\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}(1 + o(1))}{-3\sqrt{x}(1 + o(1))} = -\frac{1}{3}(1 + o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{3}.$$

2 - Stabilire il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt[4]{n^7}}$.

Si osservi che

$$\frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt[4]{n^7}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} - \frac{2}{\sqrt[4]{n^7}},$$

e quindi la serie assegnata converge in quanto somma di serie armoniche convergenti $\left(\frac{5}{4} > 1, \frac{7}{4} > 1\right)$.

Si può anche ragionare nel modo seguente. La serie è definitivamente a termini positivi, in quanto per ogni $n \geq 5$ si ha $\frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt[4]{n^7}} > 0$. Inoltre

$$\frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt[4]{n^7}} = \frac{1}{n^{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}}}(1 + o(1)) = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}(1 + o(1)) \quad n \rightarrow +\infty,$$

e di conseguenza per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$. Pertanto, essendo $\frac{5}{4} > 1$, la serie assegnata converge.

3 - Calcolare l'integrale $\int_1^4 \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$.

Ponendo $t = \sqrt{x}$, si può integrare prima per sostituzione e poi per parti

$$\int_1^4 \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 \log(1 + t) dt = 2[t \log(1 + t)]_1^2 - 2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt = 6 \log 3 - 4 \log 2 - 2 = \log \frac{3^6}{2^4} - 2.$$

4 - Data la funzione $f(x) = |x|^\pi(x - 1)$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. (Non è richiesto lo studio della convessità). Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

In forza di

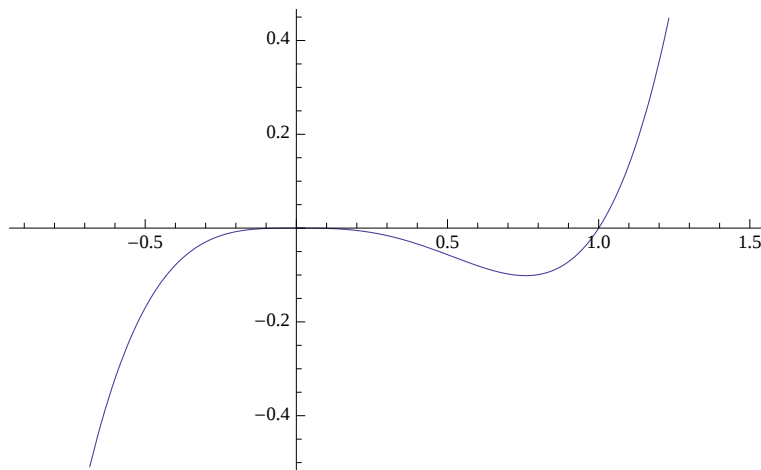
$$D|x| = \frac{|x|}{x} \quad x \neq 0,$$

la derivata di f è data da

$$f'(x) = \pi|x|^{\pi-1} \frac{|x|}{x}(x - 1) + |x|^\pi = \frac{|x|^\pi}{x}(\pi(x - 1) + x) = \frac{|x|^\pi}{x}(x(\pi + 1) - \pi) \quad x \neq 0.$$

Si noti che, essendo $\pi > 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\pi-1} \frac{|x|}{x}(x(\pi + 1) - \pi) = 0$, di conseguenza f è derivabile anche in 0 e $f'(0) = 0$. Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $\left(\frac{\pi}{\pi + 1}, +\infty\right)$, mentre è decrescente in $\left(0, \frac{\pi}{\pi + 1}\right)$. Pertanto 0 è punto di massimo locale e il massimo locale è $f(0) = 0$, mentre $\frac{\pi}{\pi + 1}$ è punto di minimo locale e il minimo locale è $f\left(\frac{\pi}{\pi + 1}\right) = -\frac{\pi^\pi}{(\pi + 1)^{\pi+1}}$.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.



5 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y = e^2 \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

.....
L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Utilizzando il metodo ad hoc, si cerca una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $\tilde{y}(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, e si ottiene $a = -e^2$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - e^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ si ha $C_1 + C_2 = e^2$ e $C_1 - C_2 = 0$, e quindi si ricava i valori delle costanti arbitrarie $C_1 = C_2 = \frac{e^2}{2}$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{e^2}{2} e^x + \frac{e^2}{2} e^{-x} - e^2 = \frac{e^2}{2} (e^x + e^{-x} - 2).$$