

1 - Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{3n-2}}{\sqrt{n-1}}$.

$$\frac{\sqrt{2n+3} - \sqrt{3n-2}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{n-1}} - \frac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} - \frac{\sqrt{3-\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

2 - Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^2-3}$ è convergente.

Si osservi che

$$\frac{n^\alpha}{n^2-3} = \frac{1}{n^{2-\alpha}} \frac{1}{1-\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{n^{2-\alpha}} (1 + o(1)) \quad n \rightarrow +\infty,$$

e di conseguenza per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$. Pertanto la serie converge se e solo se $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$.

3 - Calcolare l'integrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - e^{-\sin x}} dx$.

Ponendo $t = \sin x$, si può integrare per sostituzione

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - e^{-\sin x}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{1 - e^{-t}} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \log \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1}.$$

4 - Data la funzione $f(x) = e^{-x^2}(|x-1|-1)$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. (Non è richiesto lo studio della convessità). Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2}(-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}(x-2) = 0,$$

e quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale per f .

Poiché

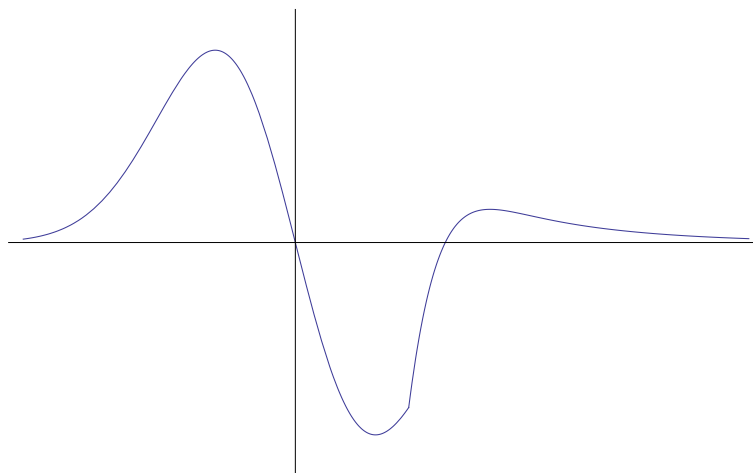
$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x^2}x & \text{se } x \leq 1 \\ e^{-x^2}(x-2) & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

la derivata di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2}(2x^2 - 1) & \text{se } x < 1 \\ -e^{-x^2}(2x^2 - 4x - 1) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si noti che $f'_-(1) = e^{-1}$ e $f'_+(1) = 3e^{-1}$, di conseguenza f non è derivabile in 1. Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e in $(1, 1 + \sqrt{\frac{3}{2}})$, mentre è decrescente in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e in $(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$. Pertanto $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $1 + \sqrt{\frac{3}{2}}$ sono punti di massimo locale per f e i massimi locali sono $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ e $f(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}) = e^{-(1+\sqrt{\frac{3}{2}})^2}(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)$, mentre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è punto di minimo assoluto e $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ è minimo assoluto. Si noti che $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ è massimo assoluto.

Un grafico approssimativo di f è il seguente.



5 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^x y \\ y(1) = 1. \end{cases}$

.....

L'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y(x) = Ce^{e^x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 1$ si ha $1 = Ce^e$, e quindi si ricava il valore della costante arbitraria $C = e^{-e}$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{e^x - e}.$$