1 - Determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta > 0$ tali che $\quad \log(1+\alpha x) - \beta \operatorname{sen} x = -3x^2 + o(x^2) \quad$ per $\; x \to 0$.

....

Grazie agli sviluppi di Maclaurin

$$\log(1+\alpha x) = \alpha x - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per} \;\; x \to 0\,,$$
$$\operatorname{sen} x = x + o(x^2) \quad \text{per} \;\; x \to 0\,,$$

si ha

$$\log(1+\alpha x) - \beta \operatorname{sen} x = (\alpha - \beta)x - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per} \;\; x \to 0\,,$$

e di conseguenza la condizione assegnata è verificata per $\alpha = \beta = \sqrt{6}$.

---

2 - Stabilire per quali valori del parametro $x > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\log_3 x\big)^n$ è convergente e in tal caso determinare la somma della serie.

....

La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\log_3 x$, e di conseguenza è convergente se e solo se $|\log_3 x| < 1$, cioè $\dfrac{1}{3} < x < 3$. Per quanto riguarda la somma della serie si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\log_3 x\big)^n = \frac{1}{1-\log_3 x} - 1 = \frac{\log_3 x}{1-\log_3 x}\,, \qquad \frac{1}{3} < x < 3\,.$$

---

3 - Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^2|x|}{1+x^4}\,dx$.

....

Grazie alla parità della funzione integranda si ha

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^2|x|}{1+x^4}\,dx = 2\int_{0}^{2} \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\big[\log(1+x^4)\big]_0^2 = \frac{\log(17)}{2}\,.$$

---

4 - Data la funzione $\quad f(x) = 6\log x - \log^3 x \quad$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. (Non è richiesto lo studio della convessità). Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

....

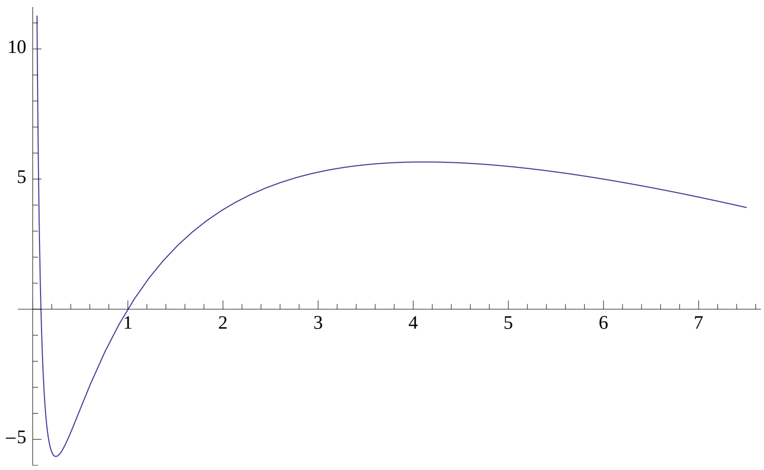
La funzione è definita per ogni $x > 0$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log x\big(6 - \log^2 x\big) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log x\big(6 - \log^2 x\big) = -\infty\,,$$

e quindi $x = 0$ è un asintoto verticale per f.
La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{3}{x}\big(2 - \log^2 x\big)\,.$$

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $\big(0, e^{-\sqrt{2}}\big)$ e in $\big(e^{\sqrt{2}}, +\infty\big)$, mentre è crescente in $\big(e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\big)$. Pertanto, $e^{-\sqrt{2}}$ è punto di minimo locale per f e il minimo locale è $f(e^{-\sqrt{2}}) = -4\sqrt{2}$, mentre $f(e^{\sqrt{2}}) = 4\sqrt{2}$ è un massimo locale.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.



5 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - y' - 6y = e^x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -5\,. \end{cases}$

....

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, e di conseguenza l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può utilizzare il metodo *ad hoc*: si cerca una soluzione particolare nella forma $\tilde{y}(x) = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$. Infatti, poiché

$$\tilde{y}'(x) = \tilde{y}''(x) = ae^x\,,$$

imponendo che $\tilde{y}(x) = ae^x$ sia soluzione di $y'' - y' - 6y = e^x$, si ottiene $a = -\frac{1}{6}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{6} e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ricavano i valori delle costanti arbitrarie, precisamente $C_1 = \frac{5}{3}$ e $C_2 = -\frac{1}{2}$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{5}{3} e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{3x} - \frac{1}{6} e^x\,.$$