1 - Determinare i valori dei parametri reali α e β tali che $\alpha \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt + 3x + \beta \operatorname{sen} x = 2x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$.

. . . .

Si devono determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che si abbia

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt + 3x + \beta \operatorname{sen} x}{x^3} = 2\,.$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$, e quindi si può applicare il teorema di de l'Hôpital. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale il rapporto delle derivate è dato da

$$\frac{\alpha e^{-x^2} + 3 + \beta \cos x}{3x^2}\,, \qquad x \neq 0\,.$$

Per i limiti notevoli $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = 1$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ si ha

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

e di conseguenza

$$\alpha e^{-x^2} + 3 + \beta \cos x = \alpha + 3 + \beta - \Big(\alpha + \frac{\beta}{2}\Big)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0\,.$$

Pertanto

$$\alpha e^{-x^2} + 3 + \beta \cos x = 6x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

se $\alpha + 3 + \beta = 0$ e $\alpha + \dfrac{\beta}{2} = -6$, cioè $\alpha = -9$ e $\beta = 6$.

---

2 - Stabilire per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-e^x)^n}{n}$ è convergente.

. . . .

Applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti si ha

$$\frac{|2-e^x|^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{|2-e^x|^n} = |2-e^x|\,\frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |2-e^x|\,.$$

Poiché $|2-e^x| < 1$ per $0 < x < \log 3$ la serie converge assolutamente per $x \in (0, \log 3)$. Inoltre per $x = 0$ la serie è la serie armonica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ che diverge, mentre $x = \log 3$ è la serie a termini di segno alterno $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ che converge per il criterio di Leibniz. Si osservi anche che per $x < 0$ o $x > \log 3$, essendo $|2-e^x| > 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|2-e^x|^n}{n} = +\infty\,,$$

e quindi, poichè la condizione necessaria alla convergenza non è verificata, la serie non può convergere.
In conclusione la serie assegnata converge per $x \in (0, \log 3]$.

---

3 - Calcolare $\displaystyle\int_{\pi/2}^{5\pi/6} \log(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx$.

. . . .

Si integra per sostituzione: ponendo $t = \operatorname{sen} x$ si ha $dt = \cos x\,dx$, e quindi

$$\int_{\pi/2}^{5\pi/6} \log(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx = \int_1^{1/2} \log t\,dt\,.$$

Infine, integrando per parti si ha

$$\int_{\pi/2}^{5\pi/6} \log(\operatorname{sen} x)\cos x\,dx = \int_1^{1/2} \log t\,dt = \big[t\log t - t\big]_1^{1/2} = \frac{1-\log 2}{2}\,.$$

4 - Data la funzione $f(x) = |1 + \log x|\,(2\log x - 3)$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. (Non è richiesto lo studio della convessità). Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

....

La funzione è definita per ogni $x > 0$ e può essere scritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} -(1+\log x)\,(2\log x - 3) & \text{se } 0 < x \le e^{-1} \\ \\ (1+\log x)\,(2\log x - 3) & \text{se } x > e^{-1}. \end{cases}$$

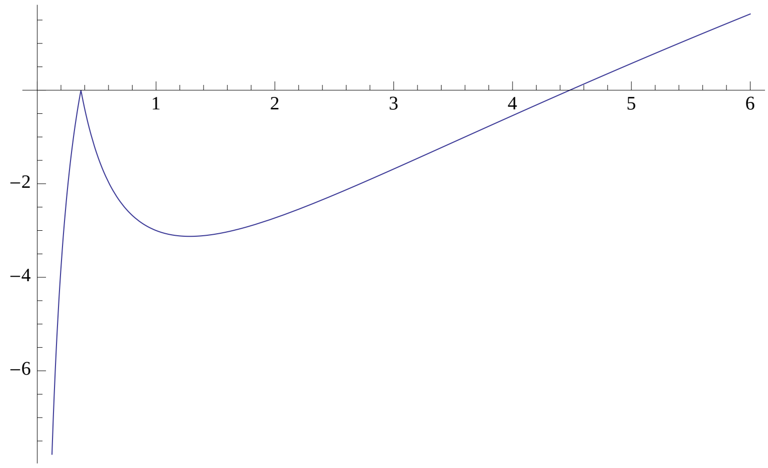
Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,,$$

e quindi $x = 0$ è un asintoto verticale per f.
La derivata di f è data da

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4\log x - 1}{x} & \text{se } 0 < x < e^{-1} \\ \dfrac{4\log x - 1}{x} & \text{se } x > e^{-1}. \end{cases}$$

da cui segue che $\displaystyle\lim_{x\to (e^{-1})^-} f'(x) = 5e$ e $\displaystyle\lim_{x\to (e^{-1})^+} f'(x) = -5e$, cioè f non è derivabile in e^{-1}.
Dallo studio del segno di f' segue che f è crescente in $\big(0, e^{-1}\big)$ e in $\big(e^{1/4}, +\infty\big)$, mentre è decrescente in $\big(e^{-1}, e^{1/4}\big)$. Pertanto, $e^{1/4}$ è punto di minimo locale per f e il minimo locale è $f(e^{1/4}) = -\dfrac{25}{8}$, mentre $f(e^{-1}) = 0$ è un massimo locale.
Un grafico approssimativo di f è il seguente.



5 - (i) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -y + x^2 + x - 2 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
(ii) Stabilire per quali valori di α la soluzione $y(x)$ è convessa in tutto $\mathbb{R}$.

....

(i) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = Ce^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Per determinare un integrale particolare dell'equazione completa, si può utilizzare il metodo *ad hoc*: si cerca una soluzione particolare nella forma $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Infatti, poiché

$$\tilde{y}'(x) = 2ax + b\,,$$

imponendo che $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$ sia soluzione di $y' = -y + x^2 + x - 2$, si ottiene $a = 1$ e $b = c = -1$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = Ce^{-x} + x^2 - x - 1, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \alpha$ si ricava il valore della costante arbitraria, precisamente $C = \alpha + 1$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = (\alpha + 1)e^{-x} + x^2 - x - 1\,.$$

(ii) In forza di

$$y''(x) = (\alpha + 1)e^{-x} + 2$$

si ha $y''(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $\alpha + 1 \ge 0$, e di conseguenza $y(x)$ è convessa in tutto $\mathbb{R}$ solo per $\alpha \ge -1$.