1 - Determinare il valore del parametro $\alpha > 0$ tale che $\log(1-x^2) - \cos(\alpha x) + 1 = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$.

. . . .

Per gli sviluppi di Maclaurin di $\log(1+x)$ e $\cos x$ si ha

$$\log(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

$$\cos(\alpha x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^4}{4!}x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\,,$$

e quindi

$$\log(1-x^2) - \cos(\alpha x) + 1 = \Big(\frac{\alpha^2}{2} - 1\Big)x^2 - \Big(\frac{1}{2} + \frac{\alpha^4}{4!}\Big)x^4 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0\,.$$

In conclusione, se $\frac{\alpha^2}{2} - 1 = 0$, cioè $\alpha = \sqrt{2}$ si ha $\frac{1}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} = \frac{2}{3}$, e quindi la condizione assegnata è verificata.

---

2 - Studiare l'assoluta convergenza e la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

. . . .

La serie è a termini di segno alterno, in quanto $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \le 1 < \frac{\pi}{2}$ per ogni $n \ge 1$ e $\operatorname{sen} x \ge 0$ per ogni $x \in [0, \pi/2]$.
Tenendo presente che

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}(1 + o(1)) \qquad n \to +\infty\,,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, che diverge positivamente in quanto l'esponente $\frac{1}{3}$ è minore di 1. Pertanto la serie assegnata non è assolutamente convergente.
Per quanto riguarda la convergenza semplice, essendo la serie è a termini di segno alterno, si può applicare il criterio di Leibniz. In particolare, si noti che la successione $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ è monotòna decrescente, poiché la funzione $\operatorname{sen} x$ è monotòna crescente nell'intervallo $[0, \pi/2]$ e la succesione $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right\}$ è monotòna decrescente.
In conclusione, essendo la successione $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right\}$ infinitesima e monotòna decrescente, per il criterio di Leibniz la serie assegnata converge.

---

3 - Provare che la funzione $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\pi}{|x-\pi|}\operatorname{sen}(x-\pi) & \text{se } x \ne \pi \\ 0 & \text{se } x = \pi \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}$ e calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\,dx$.

. . . .

Grazie al fatto che la funzione $g(x)$, $x \ne \pi$, è il prodotto di una funzione limitata e di una funzione infinitesima per $x \to \pi$, si ha

$$\lim_{x\to\pi} g(x) = \lim_{x\to\pi}\frac{\pi - x}{|x-\pi|}\operatorname{sen} x = 0 = g(\pi)\,,$$

e quindi $g(x)$ è continua in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen} x\,dx = -\big[\cos x\big]_0^{\pi} + \big[\cos x\big]_{\pi}^{2\pi} = 4\,.$$

---

4 - Data la funzione $f(x) = e^{x^2-2x}\sqrt{x+1}$ determinare l'insieme di definizione, i limiti agli estremi del dominio, eventuali punti di non derivabilità gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di minimo e di massimo. (Non è richiesto lo studio della convessità). Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

. . . .

La funzione è definita e positiva per ogni $x \ge -1$. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

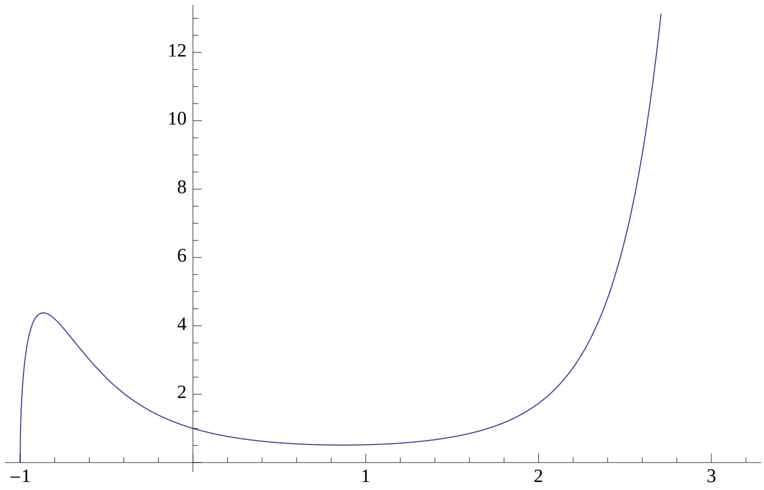
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

La derivata di f è data da

$$f'(x) = e^{x^2-2x}(2x-2)\sqrt{x+1} + \frac{e^{x^2-2x}}{2\sqrt{x+1}} = e^{x^2-2x}\frac{4(x^2-1)+1}{2\sqrt{x+1}} = e^{x^2-2x}\frac{4x^2-3}{2\sqrt{x+1}}\,, \qquad x > -1\,,$$

da cui segue che $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = +\infty$, cioè f non è derivabile in -1.

Dallo studio del segno di f' segue che f è decrescente in $\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$, mentre è crescente in $\Big(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$ e in $\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\Big)$. Pertanto, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ è punto di massimo locale per f, mentre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è punto di minimo relativo per f. Tenendo anche conto che $f(-1) = 0$ è il minimo assoluto per f, un grafico approssimativo di f è il seguente.



---

5 - Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 16y = 4e^{4x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ e stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è verificata la condizione $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x} y(x) = 0$.

. . . .

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 16 = 0.$$

Tenendo conto che e^{4x} è soluzione dell'equazione omogenea, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + axe^{4x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ si deve determinare in modo che la funzione $\tilde{y}(x) = axe^{4x}$ risulti una soluzione di $y'' - 16y = 4e^{4x}$. Infatti, poiché

$$\tilde{y}'(x) = ae^{4x}(1+4x) \qquad \tilde{y}''(x) = ae^{4x}(8+16x)\,,$$

imponendo che $\tilde{y}(x) = axe^{4x}$ sia soluzione di $y'' - 16y = 4e^{4x}$, si ottiene che a deve verificare la condizione

$$a(8+16x) - a16x = 4\,,$$

cioè $a = \frac{1}{2}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{2}xe^{4x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ si ricavano i valori delle costanti arbitrarie, precisamente $C_1 = -\frac{1}{16}$ e $C_2 = \frac{1}{16}$; di conseguenza la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{8}\Big)e^{4x} + \frac{1}{16}e^{-4x}\,.$$

In forza di

$$e^{\alpha x}y(x) = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{8}\Big)e^{(\alpha+4)x} + \frac{1}{16}e^{(\alpha-4)x}$$

si ha $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x}y(x) = 0$ se $\alpha + 4 < 0$ e $\alpha - 4 < 0$, cioè $\alpha < -4$.