$\boxed{1}$ [3.5 punti]: Al variare di $k \in \mathbf{R}$ discutere l'esistenza di un'unica soluzione o di ∞^c soluzioni o l'assenza di soluzioni, per il sistema $\begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Sol. Il rango della matrice incompleta scende a 2 se

$$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k = 0 \ ,$$

quindi per i valori 0 e $\frac{3}{2}$. In virtù del teorema degli orlati è sufficiente ora esaminare il minore (della matrice completa)

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2k \ ,$$

avendo orlato la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ della matrice incompleta.

Traiamo ora le conclusioni. Per $k = 0$ i due ranghi sono uguali a 2 e abbiamo quindi soluzioni con 1 parametro; per $k = \frac{3}{2}$ non esistono soluzioni perché i due ranghi sono diversi $(2 < 3)$; per tutti gli altri valori di k torna la risolubilità ma con un'unica soluzione perché i due ranghi sono uguali a 3.

$\boxed{2}$ È data l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(x, y, z) = (3x - y + 2z, 4x, 2x - 2y + 4z)$.

[3 punti]: Calcolare tre autovettori linearmente indipendenti di f.

[2 punti]: Stabilire se esistono vettori del codominio che non appartengono all'immagine.

[1.5 punti]: Stabilire se esiste una base rispetto alla quale f è rappresentata da una matrice diagonale.

Sol. Risolvendo l'equazione

$$\begin{vmatrix} 3-s & -1 & 2 \\ 4 & -s & 0 \\ 2 & -2 & 4-s \end{vmatrix} = 0$$

otteniamo gli autovalori 0, 3, 4 con rispettivi autovettori $(0, 2, 1)$, $(3, 4, 2)$, $(1, 1, 1)$ (ad esempio).

Questa funzione non è suriettiva perché il rango della matrice è minore della dimensione del codominio, quindi esistono vettori che non hanno controimmagine.

La base di autovettori, appena trovata, è idonea per rispondere all'ultima domanda. Infatti la diagonalizzazione è possibile e conduce appunto a una matrice diagonale.

$\boxed{3}$ In un riferimento $Oxyz$ sono date le rette $r : x - y + 2z - 1 = 3y - z = 0$, $s : 2x - 5y + 5z - 3 = x + 2y + z = 0$.

[2.5 punti]: Stabilire se esse sono parallele.

[3 punti]: Calcolare la distanza tra r e il punto $P = (0, 0, 1)$.

Sol. I ranghi della matrice incompleta e completa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & -5 & 5 & | & -3 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

sono uguali a 2 e 3 rispettivamente (ad es. possiamo ridurre a gradini), quindi le rette risultano parallele.

Per calcolare la distanza costruiamo intanto il piano perpendicolare alla retta r e passante per P: dopo aver estratto un vettore direttore, ad es. $(5, -1, -3)$, predisponiamo un piano di equazione

$5x - y - 3z + d = 0$ e imponendo il passaggio per P otteniamo $d = 3$. Ora troviamo il punto d'intersezione con r:

$$z = 3y \Rightarrow x = y - 2z + 1 = -5y + 1 \Rightarrow 5(-5y+1) - y - 3(3y) + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{35}\,,\; x = -\frac{1}{7}\,,\; z = \frac{24}{35}\,.$$

Infine calcoliamo la distanza tra i due punti:

$$\delta = \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{8}{35}\right)^2 + \left(-\frac{11}{35}\right)^2} = \frac{1}{35}\sqrt{5^2 + 8^2 + 11^2} = \frac{\sqrt{210}}{35} = \sqrt{\frac{6}{35}}\,.$$

$\boxed{4}$ [3 punti]: Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica la parabola di equazione $x^2 + 8xy + 16y^2 + \sqrt{17}x = 0$.

[2 punti]: Determinare le coordinate originali del vertice di questa conica.

Sol. Autovettori: $(1,4)$ per $\lambda = 17$, $(-4,1)$ per $\lambda = 0$. Una possibile rotazione è data dalle formule $x = \frac{1}{\sqrt{17}}(X - 4Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{17}}(4X + Y)$. Essa conduce alla forma canonica

$$Y = \frac{17}{4}X^2 + \frac{X}{4}\,.$$

Sostituendo le nuove coordinate del vertice (X_V, Y_V) nella legge del cambiamento di coordinate, otteniamo le coordinate iniziali (x_V, y_V):

$$x_V = \frac{1}{\sqrt{17}}(-\frac{1}{34} + 4\frac{1}{272})\,,\; y = \frac{1}{\sqrt{17}}(-4\frac{1}{34} - \frac{1}{272})\,...$$

$\boxed{5}$ [2.5 punti]: Determinare una base del sottospazio costituito dalle matrici diagonali 5×5, contenuto nell'usuale spazio vettoriale delle matrici 5×5.

Sol. Possiamo scegliere ad esempio le cinque matrici con tutti zeri ad eccezione di un 1 nel posto (i,i), con $1 \leq i \leq 5$.

$\boxed{6}$ [3 punti]: Calcolare la proiezione ortogonale di $(0,0,1,0)$ sul sottospazio $S : x_1 - x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

[1.5 punti]: Determinare la dimensione che deve avere un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ per formare una somma diretta con S.

Sol. Una base di S è $\{(1,-1,1,0),(1,0,1,-1)\}$. Ortogonalizzando il secondo vettore otteniamo la base ortogonale $\{(1,-1,1,0),(1,2,1,-3)\}$. La proiezione ortogonale è $\frac{1}{3}(1,-1,1,0) + \frac{1}{15}(1,2,1,-3) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Dalla formula di Grassmann segue che la dimensione richiesta è al massimo $4 - dim(S) = 2$.

$\boxed{7}$ [3 punti]: Tra i piani contenenti l'asse x determinare (con un'equazione cartesiana) quelli che formano un angolo di $45°$ col piano $\pi : x + y + z = 0$.

Sol. Utilizziamo il fascio di piani definito da $y + kz = 0$ (escludiamo consapevolmente il piano di equazione $z = 0$). Imponiamo che

$$\frac{(1,1,1) \times (0,1,k)}{\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Otteniamo: $4(1+k)^2 = 6(1+k^2) \Rightarrow k^2 - 4k + 1 = 0$ da cui seguono i due valori $2 \pm \sqrt{3}$ che possono essere infine sostituiti nell'equazione generale.