Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... **FIRMA**: ....

Giustificare **le risposte; consegnare soltanto la bella copia.**

Lasciare uno spazio all'inizio, con nome e cognome.

Allegare il presente foglio; non occorre poi piegare il foglio di bella copia.

Punteggio totale: **31**

1. [3 punti] Stabilire se esistono valori di k che rendono linearmente dipendenti i vettori $(1,k,0,k)$, $(k,1,2,2)$, $(4,4,2,1)$.

[2.5 punti] Ponendo $k=2$, scrivere equazioni cartesiane del sottospazio generato dai primi due vettori.

Sol. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & k \\ k & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Non esistono valori di k con la proprietà richiesta. Infatti non esistono radici comuni per due minori orlati, fissando ad es. la sottomatrice di ordine 2 in basso al centro. Nel dettaglio, le radici delle equazioni $k^2-4k+3=0$ e $8k=0$ sono 1, e 3 nel primo caso, 0 nel secondo.

Passando attraverso le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = s+2t \\ y = 2s+t \\ w = 2t \\ z = 2s+2t \end{cases}$$

troviamo $t=\frac{w}{2}$, quindi $s=x-w$ e infine, confluendo nelle due equazioni rimaste, $y=2(x-w)+\frac{w}{2}$ e $z=2(x-w)+2\frac{w}{2}$. Più linearmente otteniamo $4x-2y-3w=2x-w-z=0$.

2. [3 punti] Data l'applicazione $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y,z)=(x+2y,2x+4y,8z)$, determinarne una base di autovettori.

[2 punti] Esibire un vettore che non abbia controimmagine secondo f.

[1.5 punti] Calcolare la dimensione del nucleo di f.

Sol. $\lambda=0:(2,-1,0)$; $\lambda=5:(1,2,0)$; $\lambda=8:(0,0,1)$.

Un vettore che non ha controimmagine deve avere le prime due componenti diverse da $(a,2a)$.

Il nucleo è l'autospazio relativo all'autovalore zero, quindi ha dimensione 1.

3. [3 punti] Scrivere un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r di equazioni $2x-y-z=x+y+z-3=0$ e parallelo al segmento congiungente i punti $(1,2,3)$ e $(3,2,1)$.

[2 punti] Stabilire se r forma un angolo di 30° col vettore $(1,1,2)$.

[3 punti] Scrivere equazioni cartesiane di una retta (scelta a piacere) che sia parallela all'asse x e incidente a r.

Sol. Il piano richiesto è del tipo $\lambda(2x-y-z)+\mu(x+y+z-3)=0$ e la sua giacitura dovrà contenere il vettore $(2,0,-2)$. Da $6\lambda+0\mu=0$ otteniamo $\lambda=0$ e ponendo $\mu=1$ abbiamo l'equazione $x+y+z-3=0$.

Un vettore direttore di r è $(\ell,m,n)=(0,-3,3)$, meglio $(0,-1,1)$. Il coseno dell'angolo in questione vale

$$\frac{(0,-1,1)\times(1,1,2)}{\sqrt{2}\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{12}}\neq\frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

quindi la risposta è negativa.

Una retta con la proprietà richiesta è intanto della forma $y=a\wedge z=b$ e poi deve intersecare r, quindi abbiamo $2x-a-b=0$, $x+a+b-3=0$, da cui segue che $a+b=2x=2(3-a-b)$ e infine $6-3a-3b=0$. Possiamo scegliere $a=0$ e troviamo $b=2$.

4. [3 punti] Calcolare la proiezione ortogonale di $(0,0,0,1)$ rispetto al sottospazio $T = \langle(4,3,2,1), (1,2,3,4), (1,1,1,1), (5,4,3,2)\rangle$.

[2.5 punti] Determinare un vettore non nullo di $\mathbf{R}^4$ che sia ortogonale a T.

[2.5 punti] È possibile che un sottospazio di dimensione 3 in $\mathbf{R}^4$ intersechi T soltanto nello zero?

Sol. La riduzione a gradini può essere un modo per dimostrare che T ha dimensione 2. In alternativa, non è difficile in questo esercizio mostrare che due dei quattro vettori sono generati dagli altri, linearmente indipendenti. Ora scegliendo, per comodità, i due vettori centrali e ortogonalizzando il secondo rispetto al terzo otteniamo $(1,2,3,4) - \frac{10}{4}(1,1,1,1) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ che possiamo amplificare di 2 ottenendo $(-3,-1,1,3)$. Infine proiettando il vettore dato otteniamo $\underline{p} = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}\right)$.

Un vettore non nullo e ortogonale può essere ottenuto ad esempio sottraendo $\underline{p}$ al vettore da proiettare, ottenendo infatti la componente ortogonale $(0,0,0,1) - \underline{p} = (\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{10})$.

La risposta all'ultima domanda è negativa perché la formula di Grassmann assicura che l'intersezione di qualunque sottospazio tridimensionale con T ha dimensione $3 + 2 - r$ con $r \leq 4$ perché la somma diretta è comunque un sottospazio dello spazio ambiente $\mathbf{R}^4$.

5. [3 punti] Eseguendo una rotazione del riferimento, portare in forma canonica l'iperbole di equazione $46x^2 - 60xy - 17y^2 - 290 = 0$ in modo che i nuovi vertici giacciano sull'asse delle ascisse.

Sol. La matrice da diagonalizzare è $\begin{pmatrix} 46 & -30 \\ -30 & -17 \end{pmatrix}$. Dall'equazione caratteristica $\lambda^2 - 29\lambda - 1682 = 0$ otteniamo gli autovalori -29 e 58, con rispettivi autospazi $\{(2t,5t) \colon t \in \mathbf{R}\}$ e $\{(-5t,2t) \colon t \in \mathbf{R}\}$. Per ottenere un'iperbole con vertici sul nuovo asse X poniamo l'autovalore positivo davanti al futuro monomio X^2, quindi un cambiamento di coordinate idoneo (con determinante positivo, 1, controllare sempre) è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} .$$

A seguito del cambiamento di coordinate otteniamo la forma canonica

$$\frac{X^2}{5} - \frac{Y^2}{10} = 1 .$$