Topologia della retta reale. Concetto intuitivo di limite.
Definizioni di limite.
Teoremi sui limiti. Applicazioni.

TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE

Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme R dei numeri reali e i punti de una retta orientata r, detta retta reale. Possiamo cioè identificare ogni sottoinsieme di R con un sottoinsieme di punti della retta.

Un intervallo è un sottoinsieme di punti che corrisponde ad una semiretta (intervallo illimitato) o ad un segmento (intervallo limitato) della retta.

$$[a,+\infty[= \{x \in R \mid x \geq a\}$$

$$]a,+\infty[= \{x \in R \mid x > a\}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$$

$$]-\infty, b[= \{x \in R \mid x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in R \mid a < x < b\}$$

b – a = ampiezza dell'intervallo

$\frac{b-a}{2}$=raggio dell'intervallo

$\frac{b+a}{2}$=centro dell'intervallo

INSIEMI LIMITATI E ILLIMITATI

Un insieme A è <u>limitato superiormente</u> $\Leftrightarrow \exists M \in R : \forall x \in A, x \leq M$
Il numero M è detto un <u>maggiorante</u> dell'insieme A

Un insieme A è <u>limitato inferiormente</u> $\Leftrightarrow \exists m \in R : \forall x \in A, x \geq m$
Il numero m è detto un <u>minorante</u> dell'insieme A

Un insieme si dice limitato se è limitato sia inferiormente che superiormente, ossia se esiste un intervallo limitato che lo contiene.

Esempio. $A = \left\{ x \mid x = \frac{2n}{n+1}, n \in N \right\}$

$A = \left\{ 0, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots \right\}$ tutti gli elementi sono maggiori di 0 e minori di 2, pertanto l'insieme è limitato. 0 è un minorante e 2 è un maggiorante dell'insieme.

Un insieme A si dice illimitato superiormente $\Leftrightarrow \forall M \in R, \exists x \in A, x > M$

Un insieme si dice illimitato inferiormente $\Leftrightarrow \forall m \in R, \exists x \in A, x < m$

Un insieme si dice illimitato se è illimitato sia superiormente che inferiormente

Una funzione si dice illimitata/limitata se lo è il suo codominio.

ESTREMI DI UN INSIEME

DEF. Dato un insieme A superiormente limitato, si dice estremo superiore di A, quel numero reale M, se esiste, tale che:

1) $x \le M, \forall x \in A$
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > M - \varepsilon$

M= sup (A) è un maggiorante di A ed è il più piccolo dei maggioranti

Se $\sup(A) \in A \Rightarrow \sup(A) = \max(A)$

DEF. Dato un insieme A inferiormente limitato, si dice estremo inferiore di A, quel numero reale m, se esiste, tale che:

1) $x \ge m, \forall x \in A$
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < m + \varepsilon$

m= inf (A) è un minorante di A ed è il più grande dei minoranti

Se $\inf(A) \in A \Rightarrow \inf(A) = \min(A)$

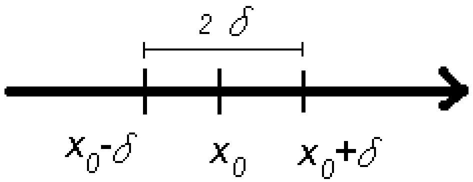
OSS. L'estremo superiore(inferiore) o il massimo(minimo) di una funzione sono l'estremo superiore(inferiore) o il massimo(minimo) del suo codominio.
PROPRIETA': Se l'insieme A è totalmente ordinato, allora l'estremo superiore e l'estremo inferiore, se esistono, sono unici.

INTORNO DI UN PUNTO

Def. Dato un numero reale x_0, si chiama intorno completo di x_0 un qualunque intervallo aperto I contenente x_0.

$$I =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[\quad \text{con } \delta_1, \delta_2 \in R$$

Nel caso in cui $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ allora si parla di intorno circolare di centro x_0 e raggio $\delta_1 = \delta_2 = \delta$



$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

Oss. L'intersezione e l'unione di due o più intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0.

INTORNO DESTRO E INTORNO SINISTRO

$I^+(x_0) =]x_0, x_0 + \delta[$ intorno destro di x_0

$I^-(x_0) =]x_0 - \delta, x_0[$ intorno sinistro di x_0

INTORNI DI INFINITO

Intorno di meno infinito: un qualunque intervallo aperto illimitato inferiormente: $I(-\infty) =]-\infty; a[= \{x \in R \mid x < a\}$

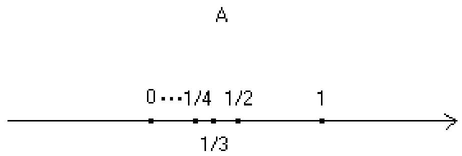
Intorno di più infinito: un qualunque intervallo aperto illimitato superiormente: $I(+\infty) =]a; +\infty[= \{x \in R \mid x > a\}$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE E PUNTO ISOLATO

Il punto x_0 è detto <u>punto di accumulazione</u> per l'insieme A, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.

$$x_0 \text{ è di accumulazione per A} \Leftrightarrow \forall I \in \Im(x_0), I \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Esempio. $A = \left\{ x \mid x = \frac{1}{n}, n \in N \right\}$



Per questo insieme l'unico punto di accumulazione è $x_0 = 0$, anche se lo zero non appartiene all'insieme stesso.

Tutti gli altri punti dell'insieme A vengono invece detti punti isolati.

Def. Insieme Derivato
l'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A è detto **insieme derivato** di A e viene indicato con A'

Def. Un punto x_0 è detto punto isolato per l'insieme A se esiste almeno un intorno di x_0 che non contiene elementi di A diversi da x_0.

$$x_0 \text{ è punto isolato per } A \Leftrightarrow \exists I \in \Im(x_0), I \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists I \in \Im(x_0), I \cap A = \{x_0\}$$

Def. Punto Interno
Un punto a si dice interno per l'insieme A se esiste un intorno sferico (circolare) di a tutto contenuto in A
Def. Insieme Aperto
Un insieme si dice aperto se tutti i suoi punti sono punti interni
Def. Insieme Chiuso
Un insieme si dice chiuso se il suo complementare è un insieme aperto

Def. Punto Esterno
Un punto x_0 si dice esterno per l'insieme A se esiste un intorno sferico di x_0 tutto contenuto nel complementare di A (x_0 è un punto interno del complementare di A)

Def. Punto di Frontiera
Un punto a si dice di frontiera per l'insieme A se ogni intorno sferico di a ha intersezione non nulla sia con A che con il complementare di A
Nota: è un punto che non è né esterno né interno

Def. Frontiera
La frontiera di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i punti di frontiera di A. Si indica con ∂A.

Nota. ∂A unita con A è il più piccolo insieme chiuso che contiene A e prende il nome di **chiusura di A**.

Approccio intuitivo al concetto di limite

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ Man mano che x tende al punto x_0, la funzione tende al valore ℓ.

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 2 = 3$$

x	f(x)	3-f(x)
0,967778	2,936594	0,063406
0,976555	2,95366	0,04634
0,985666	2,971537	0,028463
0,986777	2,973729	0,026271
0,994567	2,989163	0,010837
0,99999	2,99998	2E-05

x	f(x)	f(x)-3
1,023455	3,04746	0,04746
1,006789	3,013624	0,013624
1,000568	3,001136	0,001136
1,000057	3,000114	0,000114
1,000022	3,000044	4,42E-05
1,000001	3,000002	2E-06

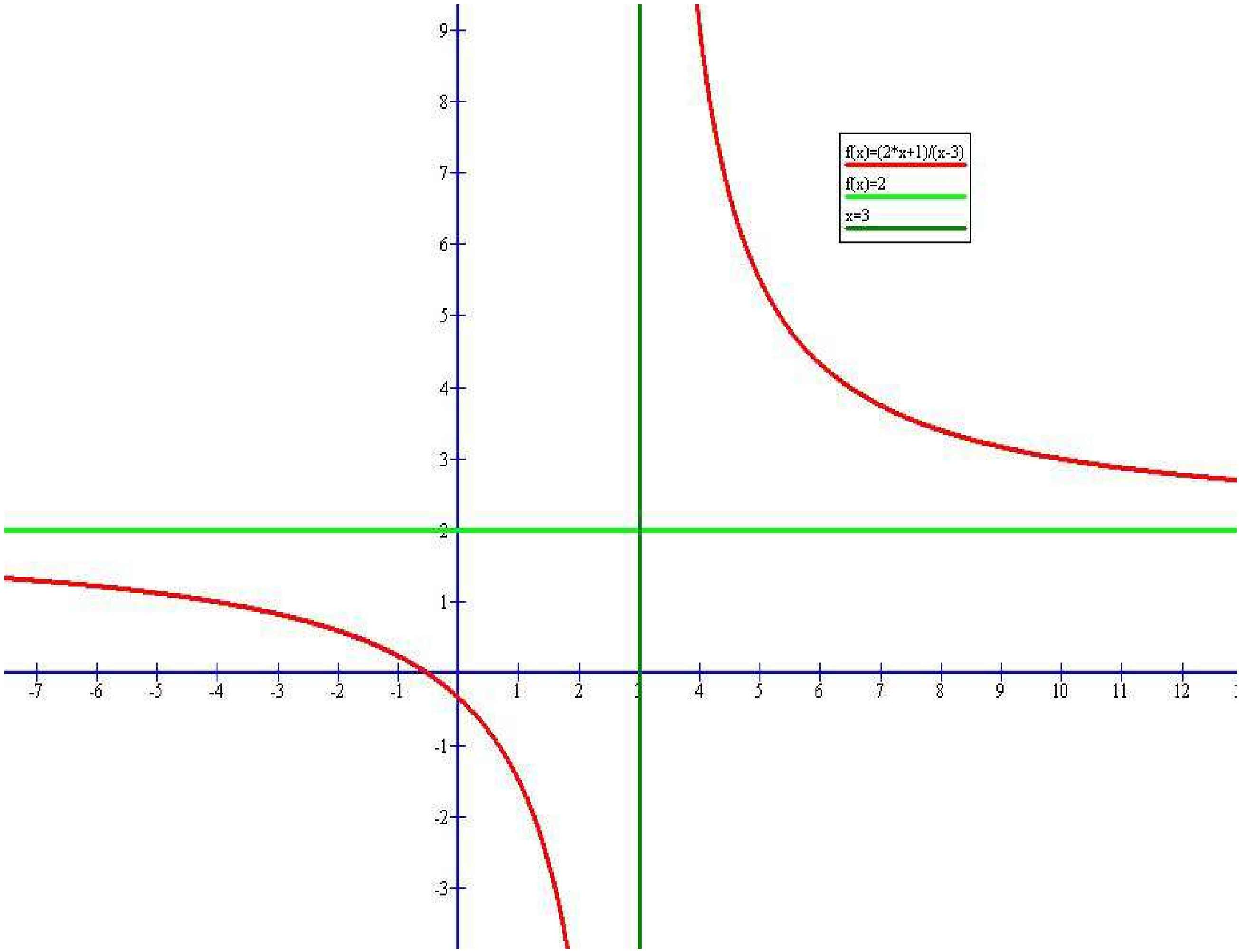
$$y = \frac{2x+1}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x+1}{x-3} = +\infty$$

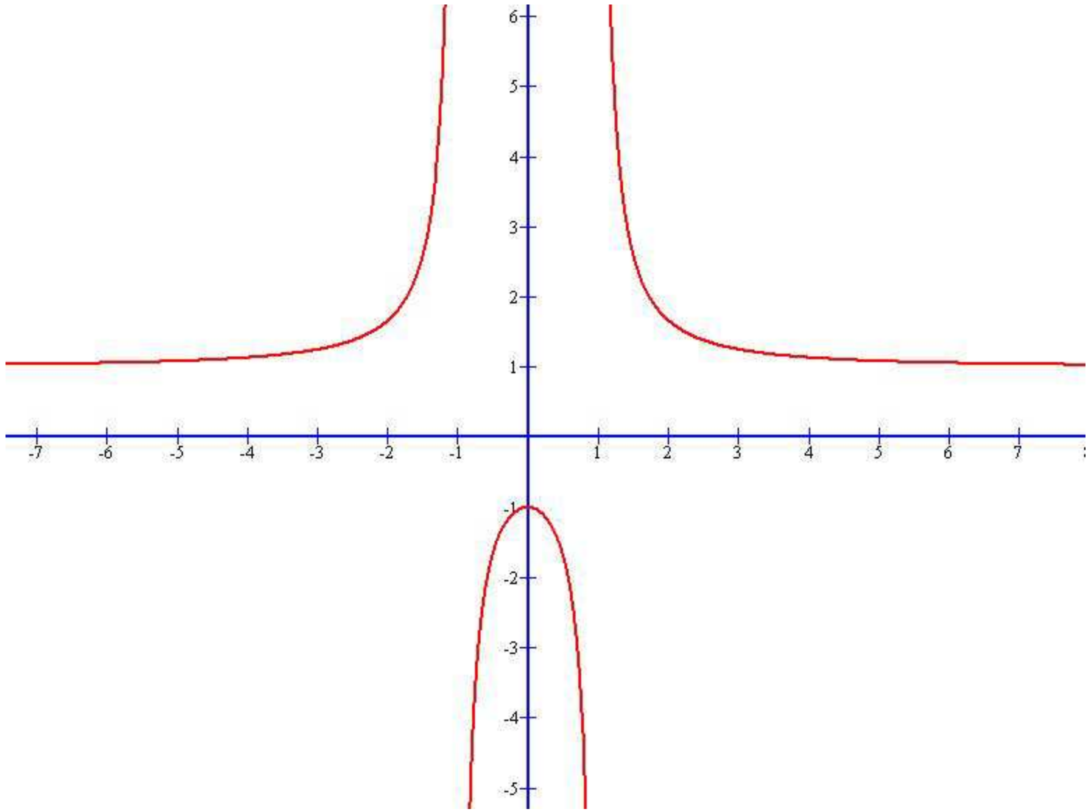
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x+1}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$



$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$$



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$$

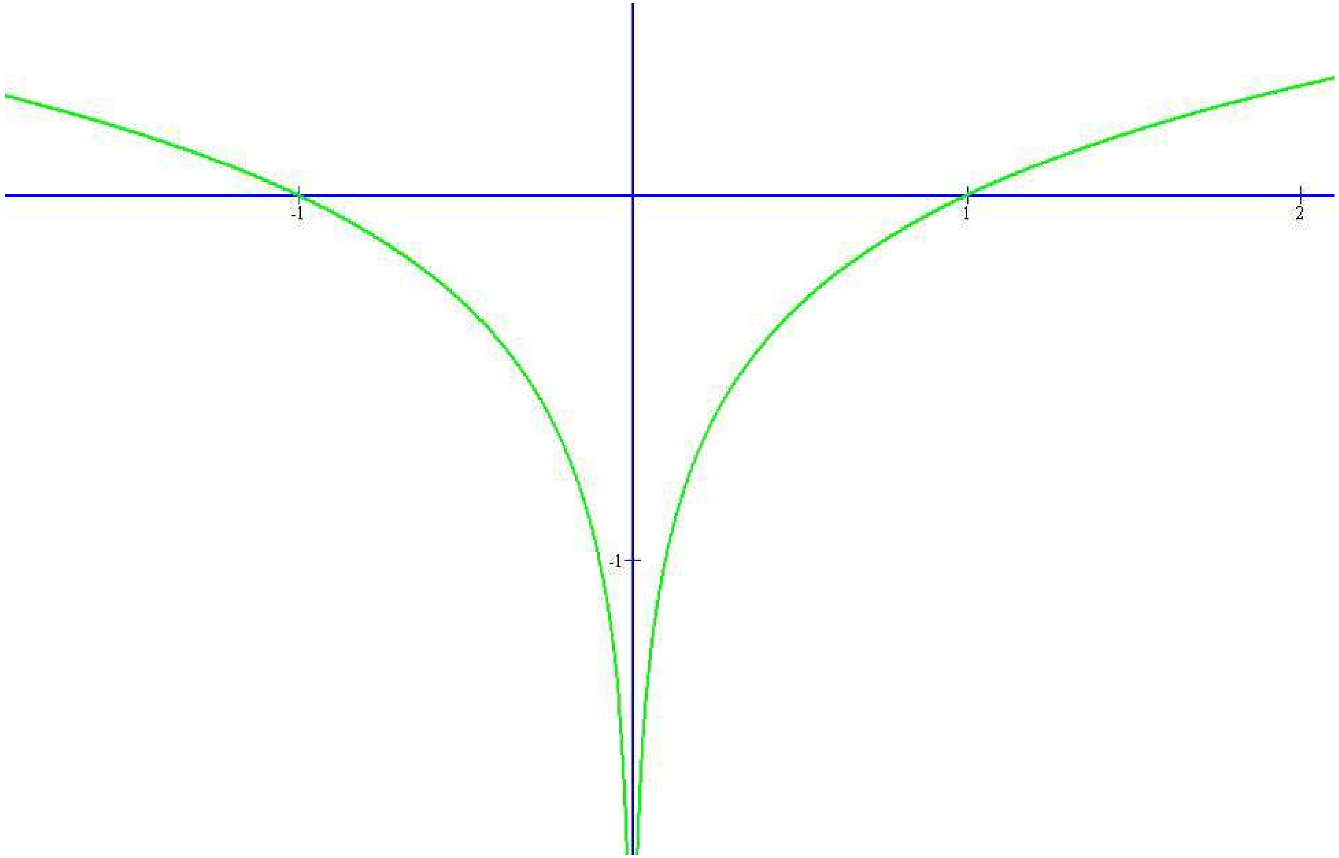
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$$

$$y = \log(|x|)$$



$$\lim_{x \to \pm\infty} \log(|x|) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \log(|x|) = -\infty$$

Definizione di limite finito in un punto (x_0 finito, ℓ finito)

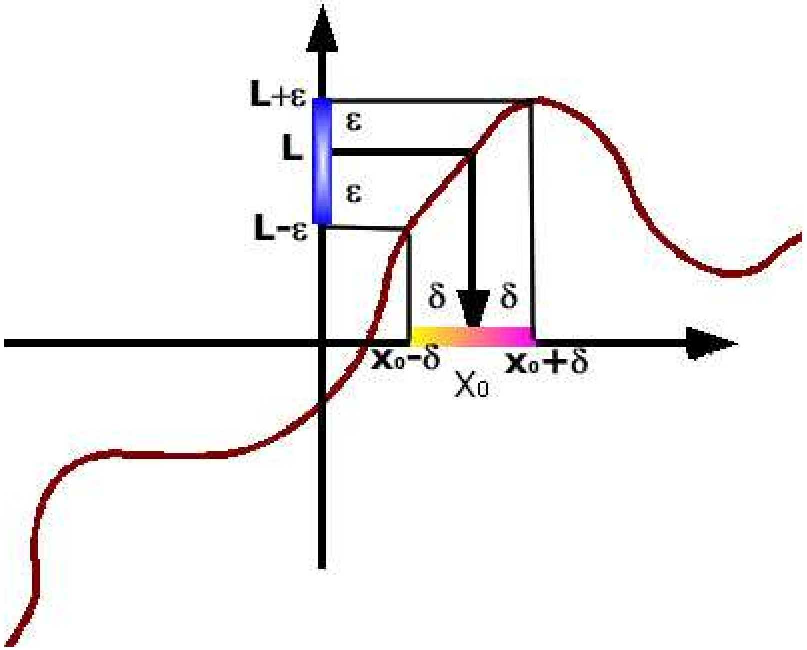
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(\ell), \exists I \in \Im(x_0) : \forall x \in I \cap D \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I'$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Cioè f(x) cade in un intorno circolare di ℓ

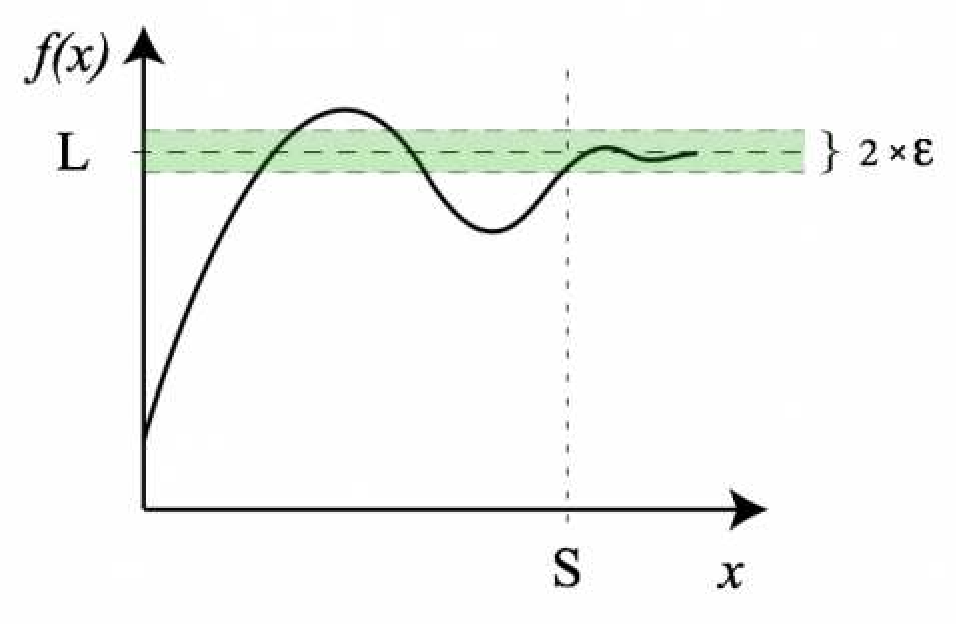


Definizione di limite finito all'infinito ($x_0 = +\infty$, ℓ finito)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(\ell), \exists I \in \Im(+\infty) : \forall x \in I \cap D \Rightarrow f(x) \in I'$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x : x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$y = \ell$ è detto ASINTOTO ORIZZONTALE



Definizione di limite finito all'infinito ($x_0 = -\infty$, ℓ finito)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(\ell), \exists I \in \Im(-\infty) : \forall x \in I \cap D \Rightarrow f(x) \in I'$$

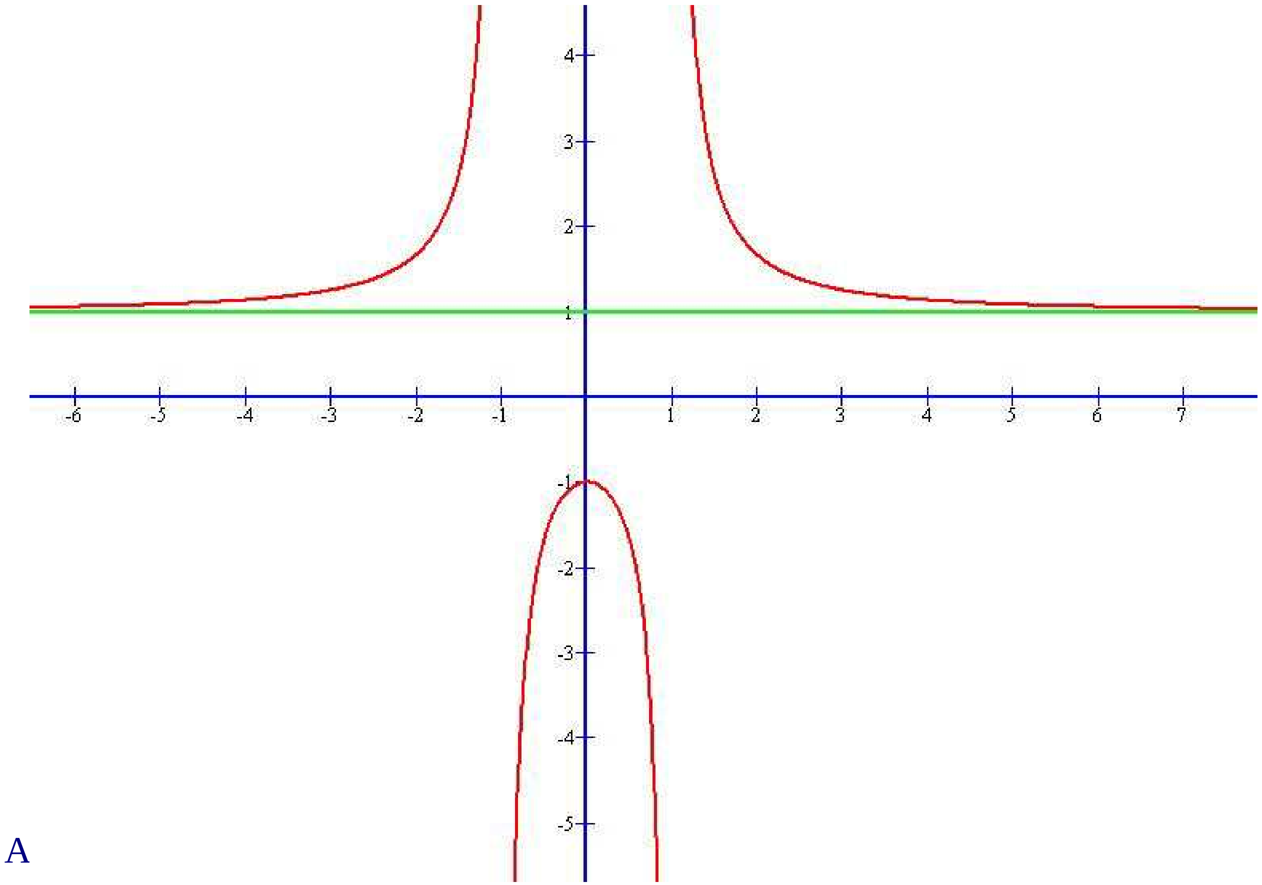
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall x : x < -N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$y = \ell$ è detto ASINTOTO

ORIZZONTALE

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

A

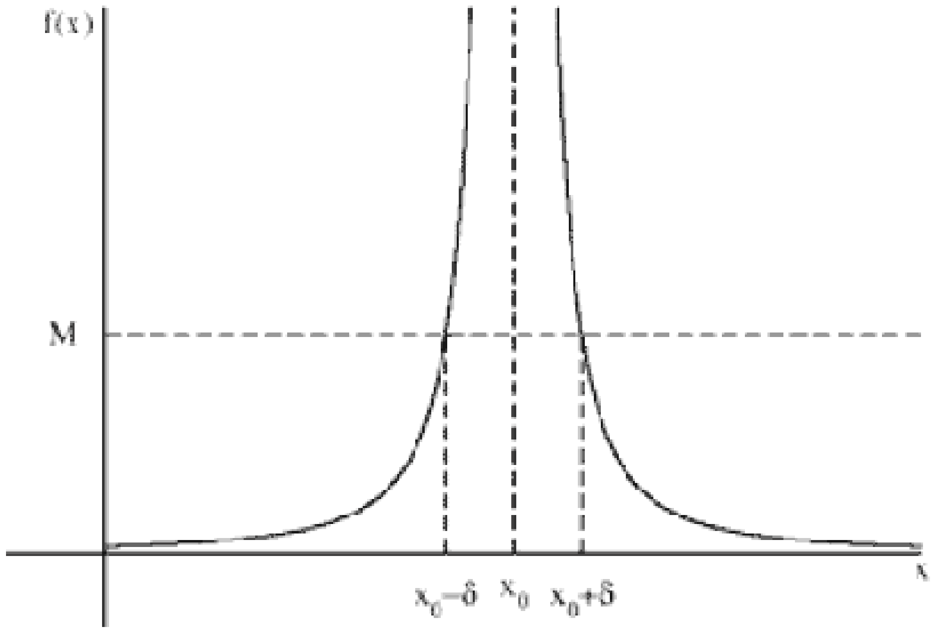


Limite infinito in un punto (x_0 finito, $\ell = +\infty$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(+\infty), \exists I \in \Im(x_0) : \forall x \in I \cap D \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I'$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x) > M$$

$x = x_0$ è ASINTOTO VERTICALE

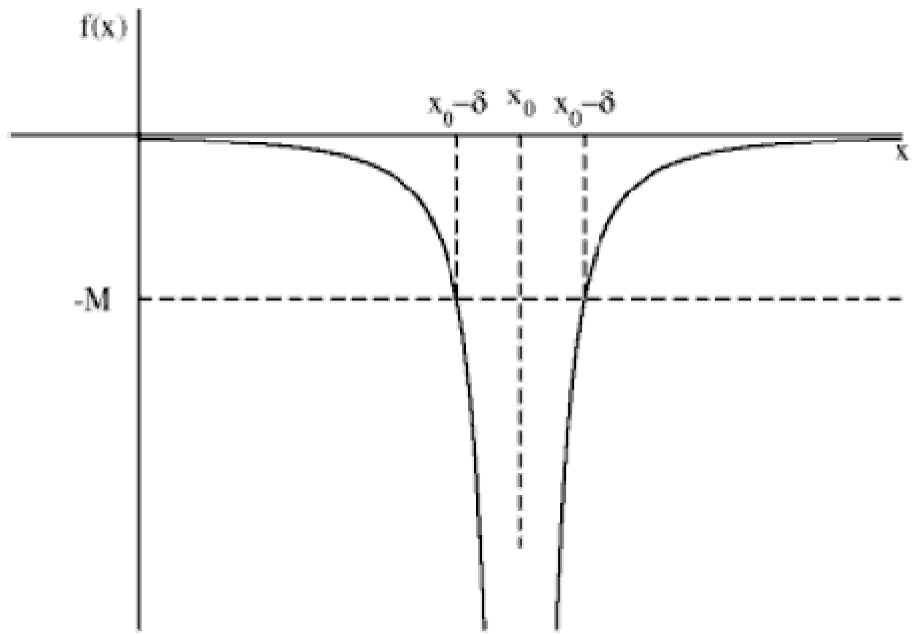


Limite infinito in un punto (x_0 finito, $\ell = -\infty$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(-\infty), \exists I \in \Im(x_0) : \forall x \in I \cap D \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I'$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow f(x) < -M$$

$x = x_0$ è ASINTOTO VERTICALE



Limite infinito all'infinito ($x_0 \pm\infty$, $\ell = \pm\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(+\infty), \exists I \in \Im(+\infty) : \forall x \in I \cap D \Rightarrow f(x) \in I'$$
$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0 : \forall x, x > N \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(-\infty), \exists I \in \Im(+\infty) : \forall x \in I \cap D \Rightarrow f(x) \in I'$$
$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0 : \forall x, x > N \Rightarrow f(x) < -M$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(+\infty), \exists I \in \Im(-\infty) : \forall x \in I \cap D \Rightarrow f(x) \in I'$$
$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0 : \forall x, x < -N \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(-\infty), \exists I \in \Im(-\infty) : \forall x \in I \cap D \Rightarrow f(x) \in I'$$
$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0 : \forall x, x < -N \Rightarrow f(x) < -M$$

Limite destro e limite sinistro

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall I'\in \Im(\ell), \exists I^- \in \Im^-(x_0): \forall x\in I^- \cap D \Rightarrow f(x)\in I'$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0: \forall x, x_0-\delta_\varepsilon<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Va scelto un intorno sinistro del punto $I^-(x_0)=\left]x_0-\delta, x_0\right[$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall I'\in \Im(\ell), \exists I^+ \in \Im^+(x_0): \forall x\in I^+ \cap D \Rightarrow f(x)\in I'$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0: \forall x, x_0<x<x_0+\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Va scelto un intorno destro del punto $I^+(x_0)=\left]x_0, x_0+\delta\right[$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(-\infty), \exists I^- \in \Im^-(x_0) : \forall x \in I^- \cap D \Rightarrow f(x) \in I'$$

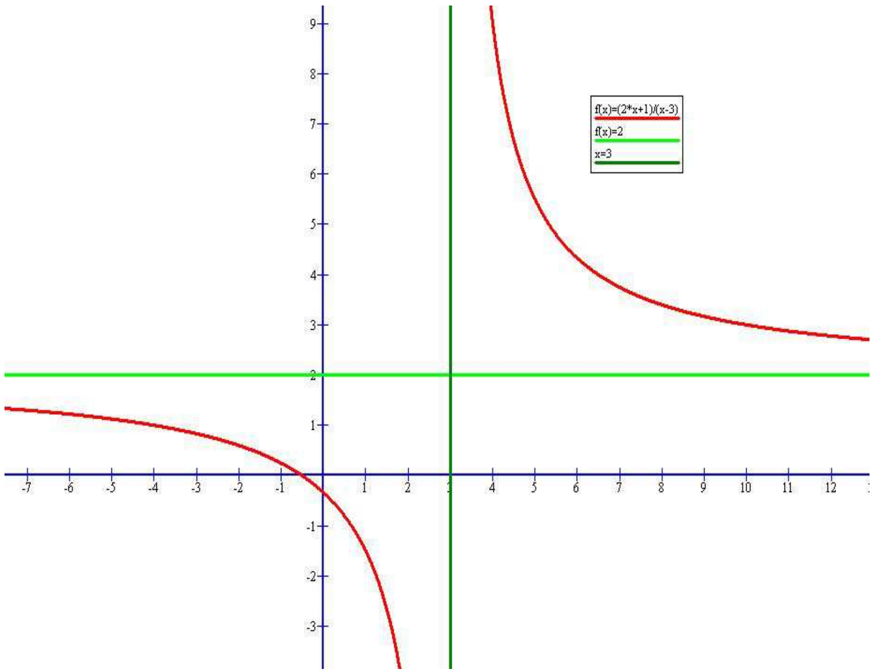
$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall I' \in \Im(+\infty), \exists I^+ \in \Im^+(x_0) : \forall x \in I^+ \cap D \Rightarrow f(x) \in I'$$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta\varepsilon \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x+1}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x+1}{x-3} = +\infty$$

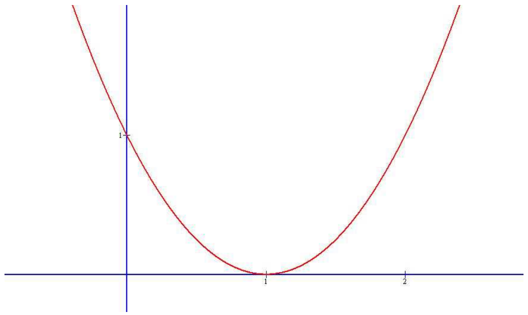


Limite per eccesso e per difetto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+ \Leftrightarrow \forall I' \in \Im^+(\ell), \exists I \in \Im(x_0) : \forall x \in I \cap D \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I'$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \ell < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Esempio $y = (x-1)^2$

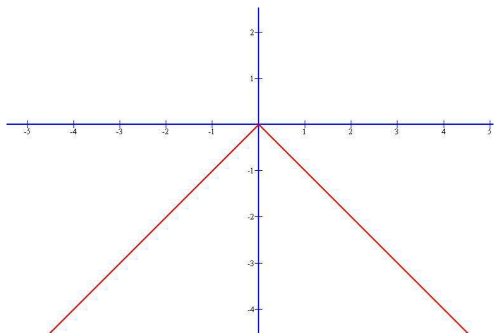


$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^- \Leftrightarrow \forall I' \in \Im^-(\ell), \exists I \in \Im(x_0) : \forall x \in I \cap D \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I'$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell$$

Esempio $y = (-|x|)$

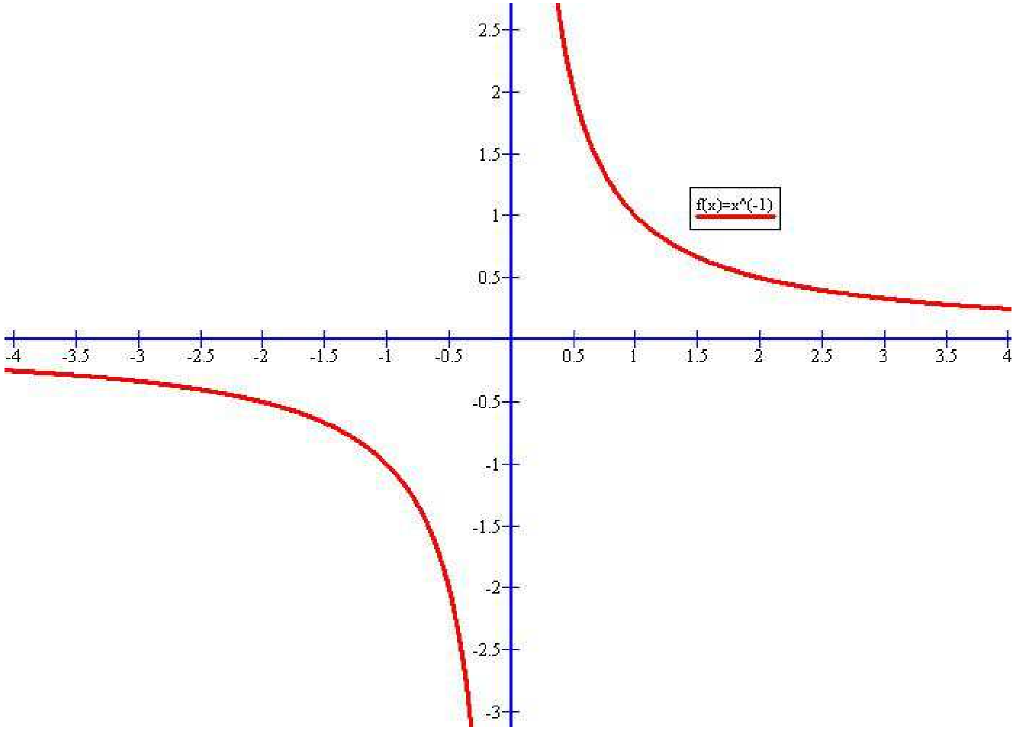


$$\lim_{x \to 0} (-|x|) = 0^-$$

Esistenza del limite

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}$$

Non sempre il limite di una funzione esiste



$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste!!! Esistono il limite destro e sinistro, ma sono diversi!!!!

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

OSS. Non è necessario che la funzione sia definita nel punto a cui tende la x. La cosa importante è che questo valore sia un punto di accumulazione del dominio della funzione.

OSS. Se una funzione è pari ed $x_0=0$ basta dimostrare l'esistenza del limite destro affinché esista il limite.

$$y=f(x)\text{pari}\Rightarrow f(-x)=f(x) \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(-x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Esempio: $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen}(x)=\text{non esiste} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)=\text{non esiste}$

In quanto y = sin x e y = cos x sono funzioni oscillanti

TEOREMI SUI LIMITI

Teorema di unicità del limite *(dim. svolta in aula)*

Hp: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ Th: ℓ è unico

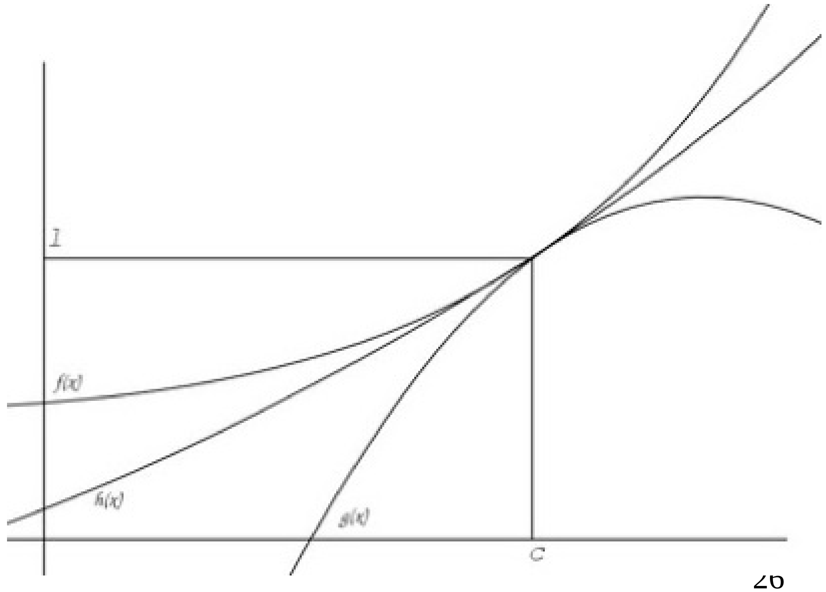
Teorema del confronto *(dim. svolta in aula)*

Hp: 1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$

3) $\exists I \in \Im(x_0) : g(x) \le f(x) \le h(x)$

Th: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$



Applicazioni

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x^2}$$

tale limite non posso calcolarlo in maniera immediata, in quanto y = cos x è una funzione oscillante, pertanto non ammette limite all'infinito

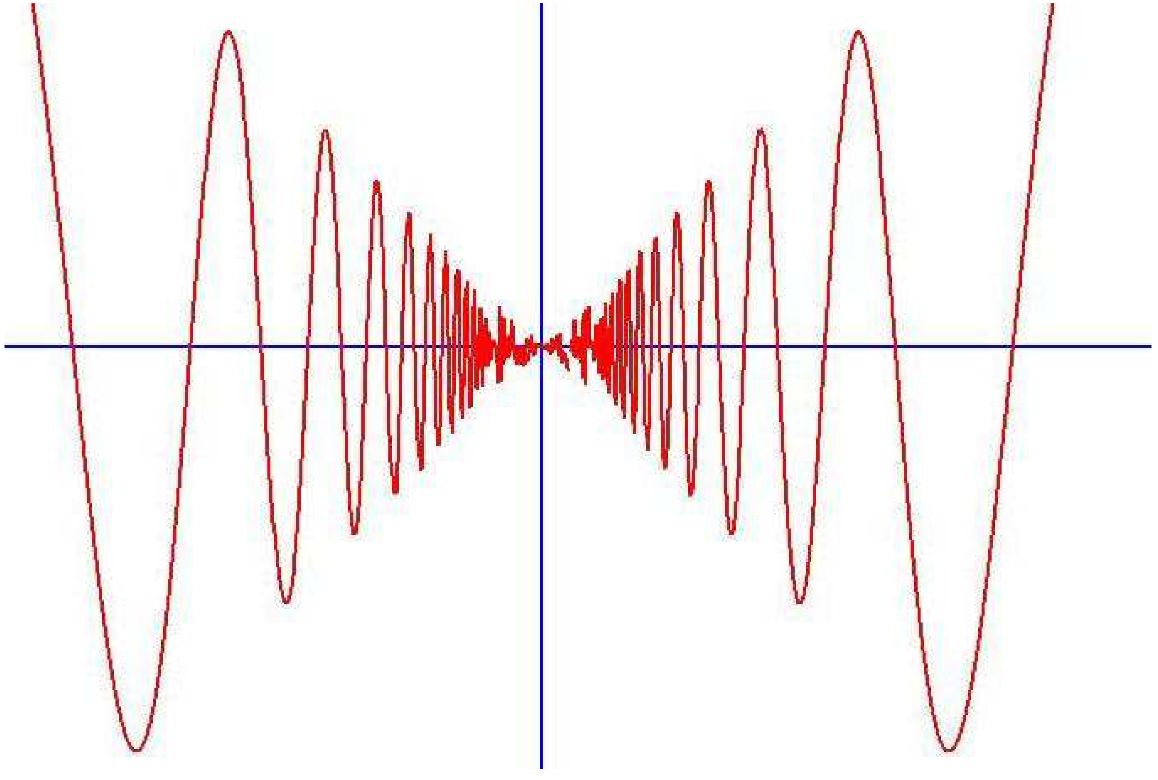
Per poterlo calcolare bisogna ricorrere al teorema del confronto:

$$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$$

Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow$ per il teorema del confronto $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$

Esempio

$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ La funzione è pari, per cui dimostriamo il limite destro con il teorema del confronto



Teorema della permanenza del segno *(dim. svolta in aula)*

Hp: 1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

2) $\ell > 0$

($\ell < 0$)

Th: $\exists I \in \Im(x_0) : \forall x \in I \cap D$

$\Rightarrow f(x) > 0$

$(f(x) < 0)$

Teorema inverso *(dim. svolta in aula)*

Hp: 1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

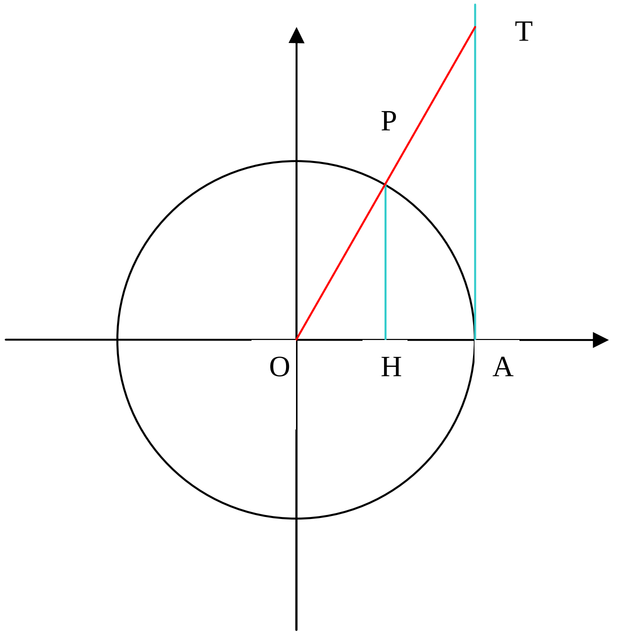
2) $\forall x \in I \in \Im(x_0) \quad f(x) \geq 0$

Th: $\ell \geq 0$

LIMITE NOTEVOLE

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1}$$

Per dimostrare questo limite bisogna ricorrere al teorema del confronto



La funzione è pari, quindi dimostro il limite destro, mi pongo cioè in un intorno destro di 0

Considero come intorno destro di 0 l'intervallo aperto $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. In tale intervallo sicuramente $\sin x>0$

$$\operatorname{sen}x<x<\operatorname{tg}x\Rightarrow 1<\frac{x}{\operatorname{sen}x}<\frac{1}{\cos x}\qquad\qquad \cos x<\frac{\operatorname{sen}x}{x}<1$$

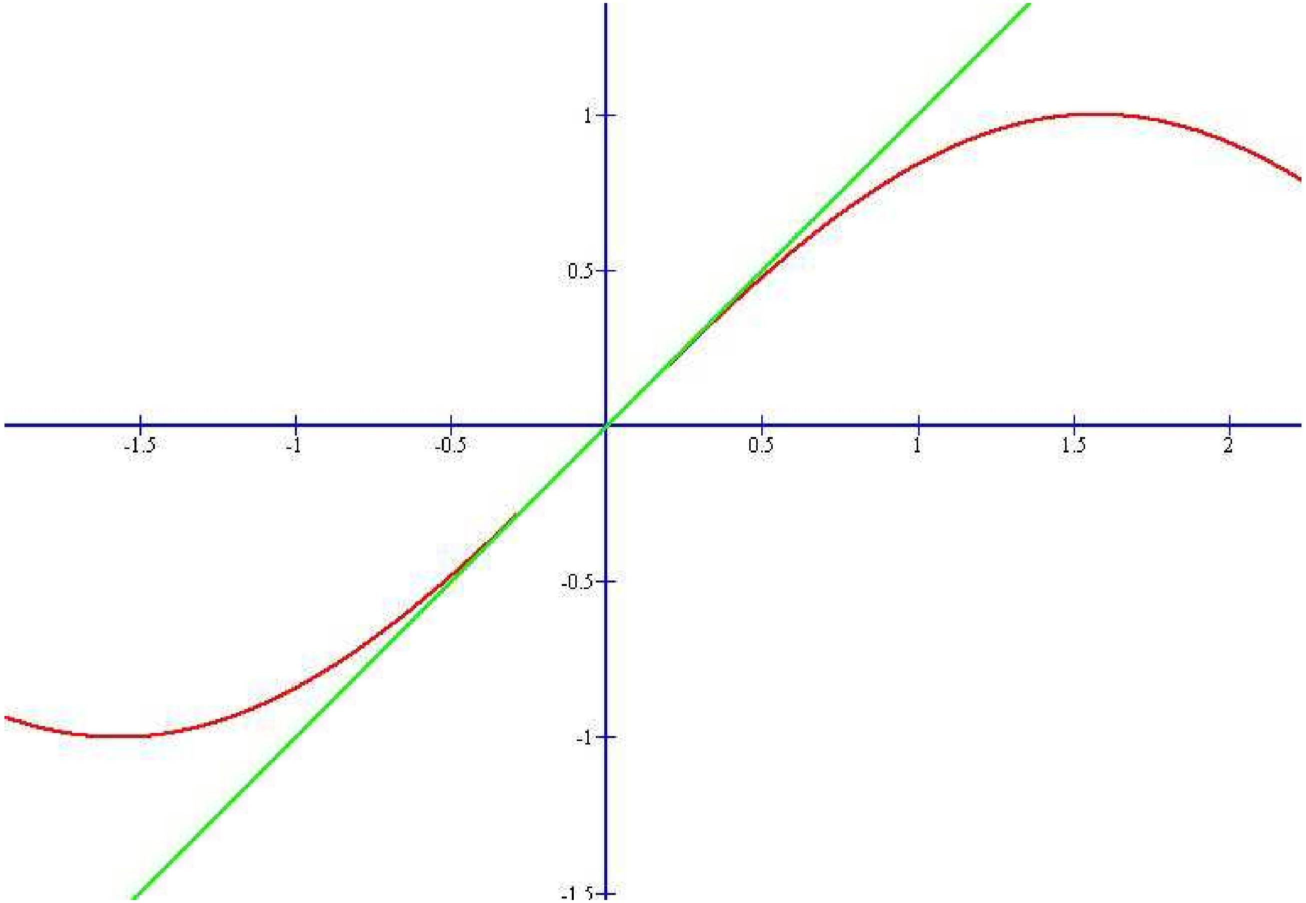
$$\lim_{x\to 0^+}\cos x=1=\lim_{x\to 0^+}1\quad\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$$

Essendo la funzione pari

$$\boxed{\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1}$$

senx ~ x

(passaggio all’asintotico)



Continuiamo a studiare la funzione $y=\frac{\text{senx}}{x}$ D= $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\text{senx}}{x}=0$$

$y=\frac{\text{senx}}{x}$ funzione pari

$-1\le \text{senx}\le 1$ se $x\to+\infty$ allora è una quantità positiva, per cui

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\text{senx}}{x}\le\frac{1}{x}\quad\Rightarrow$$

$\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$\Rightarrow$ per il teorema del

confronto

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\text{senx}}{x}=0$$