SVOLGIMENTO PROVA di ESONERO di ANALISI 2 DELL'8/5/2024.

$\boxed{\text{COMPITO A}}$

1) φ_n è definita in $\mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow D_c = \mathbb{R}$

$$\varphi_n(0) = \frac{1}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

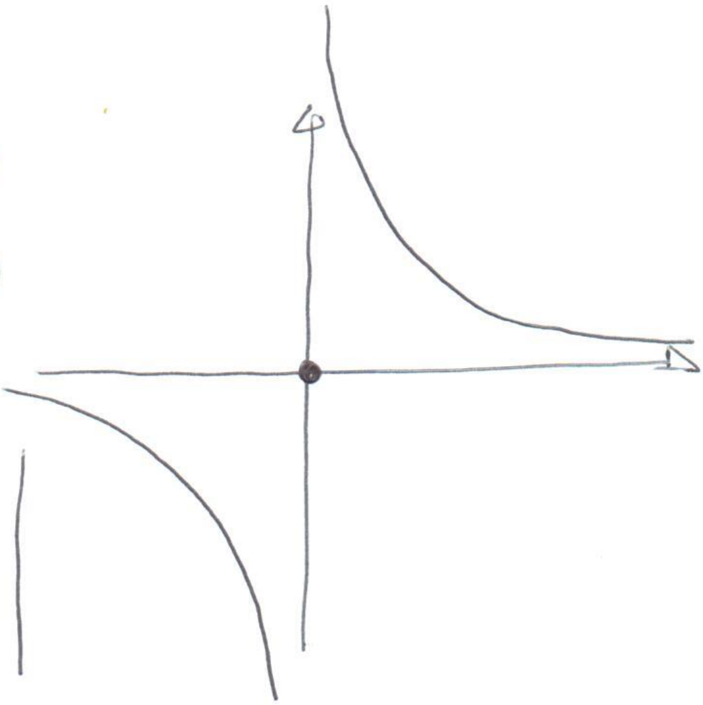
$\forall x \neq 0$

$$\varphi_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^2 x}{n^2 x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$D_{cp} = \mathbb{R}$.

La funzione limite è

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$



$$|\varphi_n - \varphi| = \left| \frac{n^2 x + \frac{1}{n^3}}{n^2 x^2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{x} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{n^2 x^2} + \frac{x}{n^3} - \cancel{n^2 x^2} - \frac{1}{n}}{x\left(n^2 x^2 + \frac{1}{n}\right)} \right| \qquad \forall x \neq 0$$

$$\sup_{x \neq 0} |\varphi_n - \varphi| \geq \lim_{x \to 0} \left| \frac{\frac{x}{n^3} - \frac{1}{n}}{x\left(n^2 x^2 + \frac{1}{n}\right)} \right| = +\infty$$

NO CONV. UNIF. in $\mathbb{R}$.

Cerchiamo convergenza uniforme in $(-\infty, -a]$ oppure $[a, +\infty)$ $\quad (a>0)$.

Ad esempio

$$|\varphi_n - \varphi| = \left| \frac{x - n^2}{n^3 x \left(n^2 x^2 + \frac{1}{n}\right)} \right| \le \frac{1}{n^3} \left[\frac{|x| + n^2}{|x| n^2 x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{n^5} \left[\frac{|x| + n^2}{|x|^3} \right] = \frac{1}{n^5} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{n^2}{|x|^3} \right] = g_n(x)$$

g_n è pari, quindi lo studio in $[a, +\infty)$

$$\forall x \in [a, +\infty) \quad g_n(x) = \frac{1}{n^5} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{n^2}{x^3} \right]$$

$$g_n'(x) = \frac{1}{n^5} \left[-\frac{2}{x^3} - \frac{3n^2}{x^4} \right] = \frac{-1}{n^5 x^4} \left(2x + 3n^2\right) < 0$$

$\Rightarrow g_n$ è decrescente in $[a, +\infty)$

$$\sup_{[a,+\infty)} |\varphi_n - \varphi| \le \sup_{[a,+\infty)} (g_n) = \max_{[a,+\infty)} (g_n) = g_n(a)$$

$$\cancel{\le \frac{1}{n^5 a^4} \left[2a + 3n^2 \right]} = \frac{1}{n^5} \left[\frac{n^2 + a}{n^3} \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ CONV. UNIF. in ogni $[a, +\infty)$, con $a > 0$ è, per simmetria, in ogni $(-\infty, -a]$.

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^{1/3} |y|^{2/3} = 0$$

3

f è CONTINUA in $(0,0)$.

Poichè $f(x,0) = f(0,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$

Derivate direzionali:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\alpha^{1/3}\beta^{2/3}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\cancel{t}}$$

Tale limite non esiste, a parte i casi $\alpha = 0$ $(f_y(0,0) = 0)$ e $\beta = 0$ $(f_x(0,0) = 0)$.

Poichè f non è derivabile sempre direzionalmente, allora non è differenziabile in $(0,0)$ e quindi non è neanche C^1 in $(0,0)$.

3) la curva è planare, appartenendo al piano $y = -x$, cioè $x + y = 0$.

Pertanto il versore binormale è proporzionale a $\vec{B} = \pm(1,1,0)$.

$$\begin{cases} x'(t) = -e^{-t} \\ y'(t) = e^{-t} \\ z'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

Nessuna delle tre derivate si annulla, quindi la curva è regolare.

④

$$\begin{cases} x''(t) = e^{-t} \\ y''(t) = -e^{-t} \\ z''(t) = \dfrac{2}{t^3} \end{cases}$$

$$\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -e^{-t} & e^{-t} & -\dfrac{1}{t^2} \\ e^{-t} & -e^{-t} & \dfrac{2}{t^3} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-t}\left(\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^2}\right)\hat{i} + e^{-t}\left(\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^2}\right)\hat{j}$$

$$\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\| = \sqrt{2e^{-2t}\left(\frac{2-t}{t^3}\right)^2}$$

(Ricordiamo che $t \geq 3$)

$$= \frac{\sqrt{2}\,e^{-t}}{t^3}|2-t| = \frac{\sqrt{2}\,e^{-t}}{t^3}(t-2) = \sqrt{2}\,e^{-t}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$v(t) = \sqrt{e^{-2t} + e^{-2t} + \frac{1}{t^4}} = \sqrt{2e^{-2t} + \frac{1}{t^4}} \sim \sqrt{\frac{1}{t^4}} = \frac{1}{t^2}$$

$f(t) = \frac{1}{t^2}$ è integrabile in $[3, +\infty)$, pertanto anche $v(t)$ lo è.

5

Quindi $\ell(\gamma) = \int_3^{+\infty} v(t)\,dt < +\infty$.