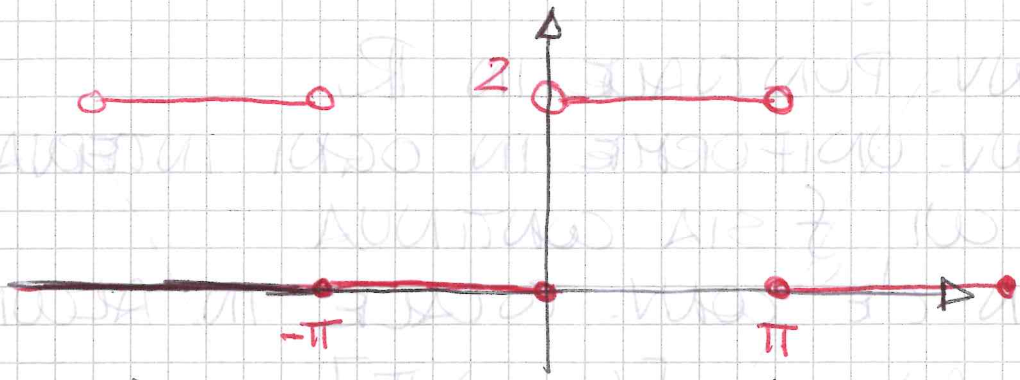
SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2
del 29/10/2024

1)



la funzione può essere scritta nella forma

$$f(x) = 1 + g(x) \qquad \text{con } \underbrace{g(x)}_{\text{DISPARI}} = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2dx = 2$$

(infatti la media integrale di f è $\mu(f) = 1$).

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(kx)dx = -\frac{2}{k\pi}\cos(kx)\Big|_0^\pi$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} \frac{4}{(2m-1)\pi} & \text{se } k = 2m-1 \\ 0 & \text{se } k = 2m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1 + g(x) \sim 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi} \sin[(2m-1)x]$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k\pi \\ 1 & \text{se } x = k\pi \end{cases}$$

come si evince dal grafico di f.

- CONV. PUNTUALE IN $\mathbb{R}$.
- CONV. UNIFORME IN OGNI INTERVALLO CHIUSO IN CUI f SIA CONTINUA
- NON C'È CONV. TOTALE IN ALCUN INTERVALLO.

Poiché $\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{n-1}$

allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Quindi calcolo la somma della serie in $x = \frac{\pi}{2}$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$= (2-1)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2) La funzione, definita in tutto $\mathbb{R}^2$, è omogenea di grado $\alpha = 3-2=1$. Pertanto, non essendo lineare, è

- CONTINUA NELL'ORIGINE
- NON DIFFERENZIABILE NELL'ORIGINE.

$$f(x,0)=f(0,y)=0 \implies f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$$

DER. DIREZIONALE:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^2 t^3}{t^3(2\alpha^2+\beta^2)} = \frac{\alpha\beta}{2\alpha^2+\beta^2}$$

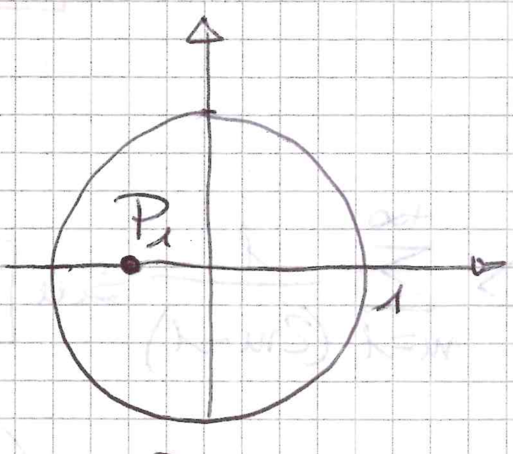
LE DERIVATE DIREZIONALI, CHE DEVONO IN GENERALE DIPENDERE DA α E β, ESISTONO LUNGO OGNI DIREZIONE.

Se $\alpha=0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Se $\beta=0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

3) PUNTI STAZIONARI:

$$\begin{cases} f_x = 2x+1=0 \\ f_y=-2y=0 \end{cases} \iff P_1=\left(-\frac{1}{2},0\right)$$



Ma $f_{xx}=2$; $f_{xy}=f_{yx}=0$; $f_{yy}=-2$

$\Rightarrow H_f\left(-\frac{1}{2},0\right)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ AUTOVALORI DI SEGNO OPPOSTO

$\Rightarrow P_1$ PUNTO DI SELLA.

SULLA FRONTIERA $\partial D=\{x^2+y^2=1\}$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2-y^2+x-\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases}\mathcal{L}_x=2x+1-2x\lambda=0\\ \mathcal{L}_y=-2y-2y\lambda=-2y(\lambda+1)=0 \quad \longleftarrow\\ \mathcal{L}_\lambda=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x^2=1\\ 2x(\lambda-1)=1\end{cases} \cup \begin{cases}\lambda=-1\\ 4x=-1\\ y^2=1-x^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x=1\\ \lambda-1=\frac{1}{2}\end{cases} \cup \begin{cases}y=0\\ x=-1\\ \lambda-1=-\frac{1}{2}\end{cases} \cup \begin{cases}\lambda=-1\\ x=-\frac{1}{4}\\ y^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x=1\\ \lambda=\frac{3}{2}\end{cases} \cup \begin{cases}y=0\\ x=-1\\ \lambda=\frac{1}{2}\end{cases} \cup \begin{cases}\lambda=-1\\ x=-\frac{1}{4}\\ y=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\end{cases}$$

SI OSSERVI CHE f È SIMMETRICA RISPETTO ALL'ASSE DELLE x! $f(x,-y)=f(x,y)$.

$f(P_2) = f(1,0) = 2$

$f(P_3) = f(-1,0) = 0$

$f(P_{4,5}) = f\left(-\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{1}{16} - \frac{15}{16} - \frac{1}{4} = \frac{-18}{16} = \frac{-9}{8}$

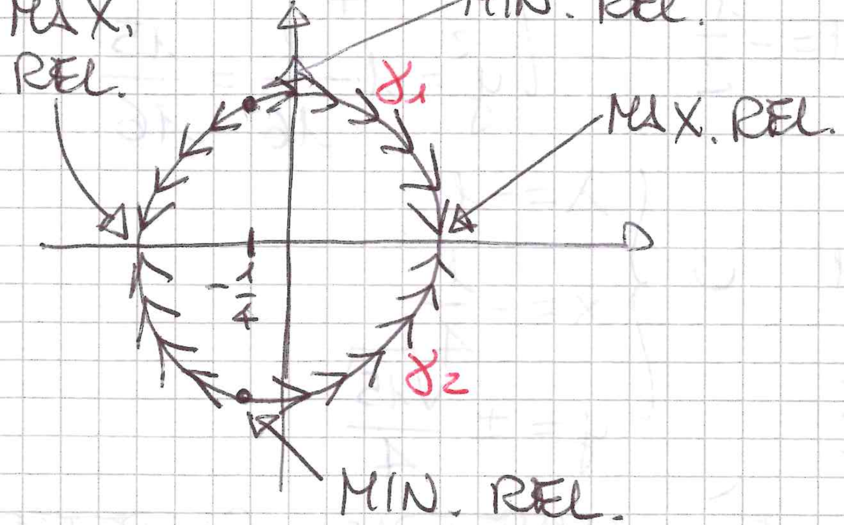
$P_{4,5} = \left(-\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ punti di MIN. ASS.

$P_2 = (1,0)$ punto di MAX. ASS.

In alternativa: poiché f è simmetrica rispetto all'asse x, studio f lungo γ_1: $y = \sqrt{1-x^2}$ e poi prolungherò per simmetria.

$$f\Big|_{\gamma_1} = f(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 - (1-x^2) + x = 2x^2 + x - 1$$

$$\left(f\Big|_{\gamma_1}\right)' = 4x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{4}$$



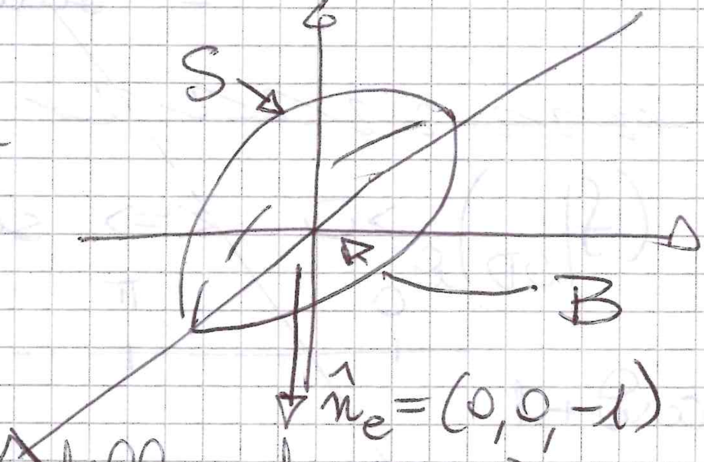
IL PROSIEGUO È IDENTICO AL PRIMO METODO.

4) OVVIAMENTE $z \geq 0$

OVVIAMENTE SI TRATTA DI UNA SEMISFERA

$$S: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ z \geq 0 \end{cases} \qquad \left[\text{N.B.: } \quad BS = \begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=0 \end{cases} \right]$$

OVVIAMENTE LA SEMISFERA NON È FRONTIERA DI ALCUN DOMINIO.



Applico il Teorema della divergenza

$$\Phi_{\partial D} = \Phi_S + \Phi_B = \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz$$

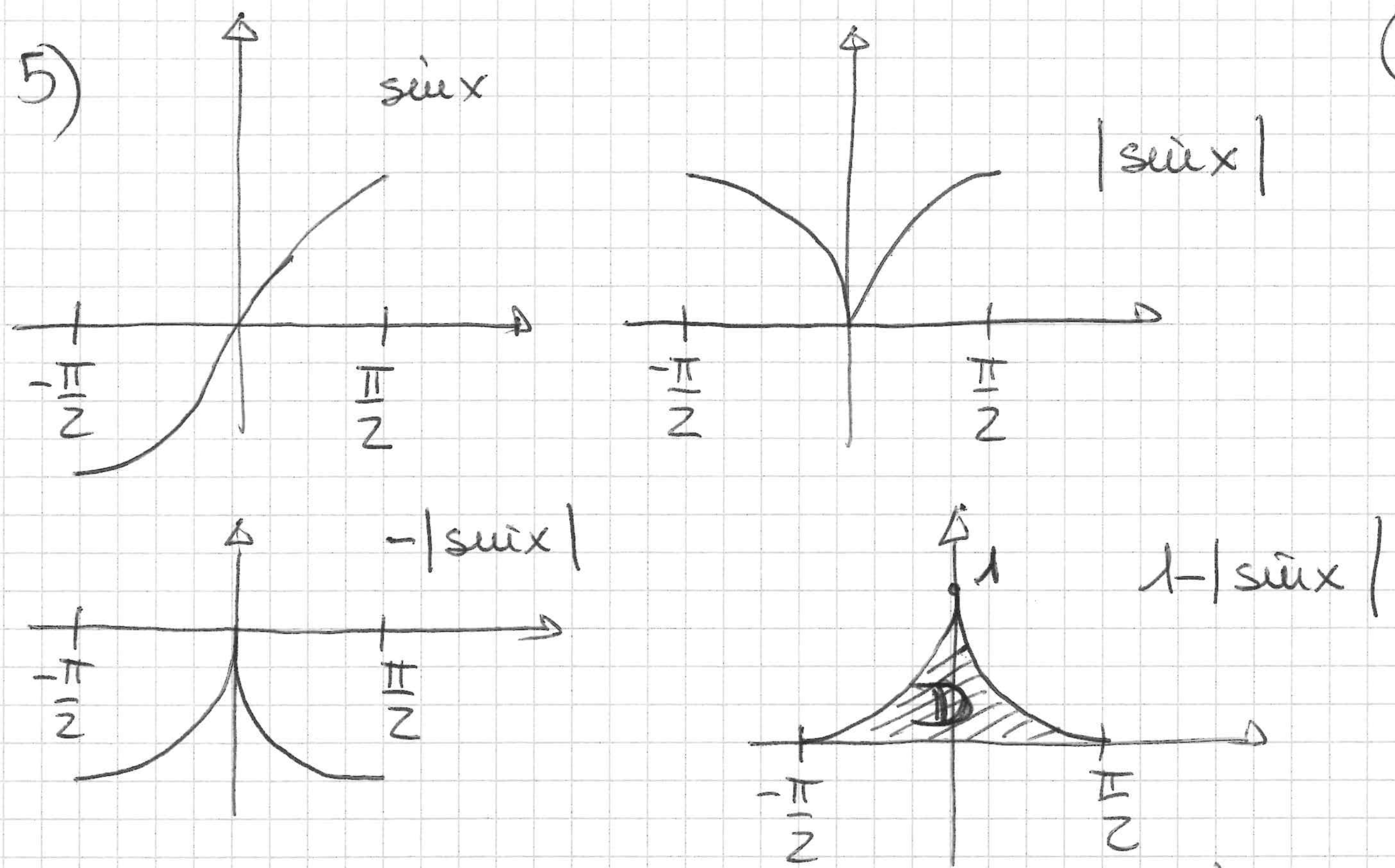
$$\Rightarrow \cancel{\Phi_S} \qquad \operatorname{div} \vec{F} = 4-2+5=7$$

$$\Rightarrow \Phi_S = 7 \operatorname{vol} D - \Phi_B = \frac{64 \cdot 14}{3}\pi - \Phi_B$$

Ma $\vec{F}\Big|_B = (4x, -2y, 0)$; $\hat{n}_e = (0,0,-1)$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \hat{n}_e \Big|_B = 0 \quad \Rightarrow \Phi_S = \frac{896}{3}\pi$$

5)



DOMINIO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE y

$\Rightarrow x_B = 0$

$$y_B = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\text{Area } D} = \frac{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{1-|\sin x|} y\,dy}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{1-|\sin x|} dy}$$

Ma in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x \geq 0 \Rightarrow$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{1-\sin x} y\,dy}{\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{1-\sin x} dy} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)^2}{2}\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\,dx}$$

$$\Rightarrow y_B = \frac{1}{2}\left[\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin^2 x-2\sin x\right)dx}{\left[x+\cos x\right]_0^{\pi/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\left[x+2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx}{\frac{\pi}{2}-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi-2}\left[\frac{\pi}{2}-2+\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi-2}\left[\frac{\pi}{2}-2+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi-2}\left(\frac{3}{4}\pi-2\right) = \frac{3\pi-8}{4(\pi-2)}$$

6) Equazione lineare del 2° ordine a coefficienti non costanti.

Poniamo $z = y'$ $\Rightarrow \begin{cases} xz' - z = 0 \\ z(1) = y'(1) = 2 \end{cases}$

Ponendo $x \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} z' - \dfrac{z}{x} = 0 \\ z(1) = 2 \end{cases}$

Poichè $x_0 = 1 > 0$, allora ci poniamo in $(0, +\infty)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2} = 0 \\ z(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{z}{x}\right)' = 0 \\ z(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{z}{x} = C_1 \\ z(1) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(x) = C_1 x \\ z(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow z(x) = y'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x) = x^2 + C_2 \\ y(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = x^2 + 1$$