SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 27/1/2025

1) Poichè $x \geq 1$, ogni φ_n è definita in tutto l'intervallo $[1, +\infty)$.

Per $x = 1$, $\varphi_n(1) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\forall x > 1$, $\varphi_n(x) \longrightarrow \dfrac{x^2-1}{x+1} = x-1$

Pertanto $\Phi_{cp} = [1, +\infty)$ e

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = x-1 \quad , \quad x \in [1, +\infty).$$

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \left| \frac{n^2(x^2-1)}{n^2(x+1)+1} - (x-1) \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{n^2(x^2-1)} - \cancel{n^2(x^2-1)} - (x-1)}{n^2(x+1)+1} \right| = \frac{x-1}{n^2(x+1)+1}$$

$$\leq \frac{x+1}{n^2(x+1)} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Pertanto

$$\sup_{x \in [1, +\infty)} |\varphi_n - \varphi| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \Phi_{cp} = \Phi_{cu} = [1, +\infty).$$

In alternativa, $|\varphi_n - \varphi|' = \dfrac{n^2(x+1)+1-n^2(x-1)}{[n^2(x+1)+1]^2}$

$$= \frac{2n^2+1}{[n^2(x+1)+1]^2} > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty).$$

Quindi $\sup\limits_{x \in \Phi_{\varphi}} |\varphi_n - \varphi| = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{n^2(x+1)+1} = \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2

Per quel che riguarda la serie, poichè $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = x-1$, la condizione necessaria è rispettata solo per $x=1$.

In tal caso $\sum \varphi_n(1) = \sum 0 = 0$

~~Non ha senso parlare~~ $\Phi_{cs} = \Phi_{ca} = \{0\}$

Non ha senso parlare di CONV. TOTALE.

2) In coordinate polari

$$|f(x,y)| = \left| \frac{\rho^3 \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\ln(1+\rho^2)} \right| \leq \frac{\rho^3}{\ln(1+\rho^2)} \underset{\rho\to 0}{\sim} \frac{\rho^3}{\rho^2} = \rho$$

Pertanto $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim\limits_{\rho\to 0} \rho = 0$

f è CONTINUA in $(0,0)$.

Poichè $f(0,y) = f(x,0) = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

DERIVATE DIREZIONALI:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\alpha^2\beta}{t\ln(1+t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}\alpha^2\beta}{\cancel{t^3}} = \alpha^2\beta$$

f è derivabile lungo qualsiasi direzione, e $\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \alpha^2\beta$.

Poichè la derivata direzionale non è combinazione lineare delle derivate parziali, f NON è differenziabile. (3)

Infatti,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right]$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[\frac{h^2 k}{\sqrt{h^2+k^2}\,\ln(1+h^2+k^2)} \right] =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \left[\frac{\cancel{\rho^3}\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{\cancel{\rho\cdot\rho^2}} \right] = \cos^2\vartheta\sin\vartheta.$$

3) Punti interni:

$$\begin{cases} f_x = 2x+1 = 0 \\ f_y = 4y = 0 \end{cases} \iff P_1 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in \mathring{D}.$$

Si osservi che

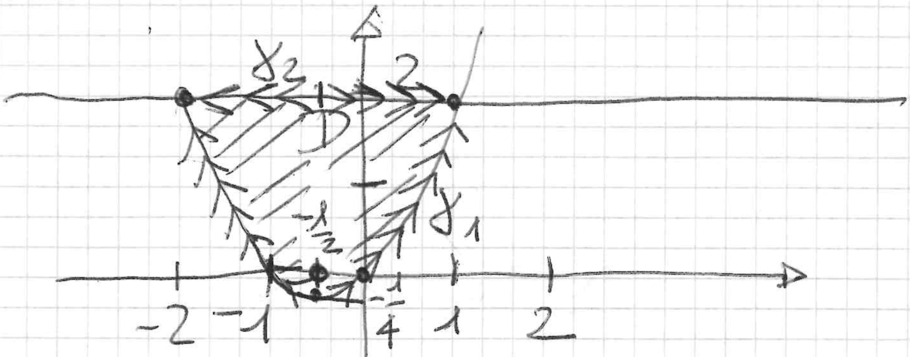
$$f(x,y) = x^2 + x + \frac{1}{4} + 2y^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \quad \forall (x,y) \in D.$$

Poichè $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

P_1 è punto di MIN ASSOLUTO

per f.



$$\partial D = \{-2 \le x \le 1;\ y = x^2 + x\} \cup \{-2 \le x \le 1;\ y = 2\}$$

$$f\big|_{\gamma_2} = x^2 + x + 8 \qquad \left(f\big|_{\gamma_2}\right)' = 2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$$

Poichè su γ_1 $x^2 + x = y$, allora

$$f\big|_{\gamma_1} = y + 2y^2 = y(1 + 2y)$$

$$\left(f\big|_{\gamma_1}\right)' = 4y + 1 > 0 \iff y > -\frac{1}{4}$$

~~Quindi, lungo γ_2, $(-\frac{1}{2}, 2)$ è di MIN. mentre~~

Quindi, lungo ∂D, $(-\frac{1}{2}, 2)$ è di MIN. REL., $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ è di MIN. REL., $(-2, 2)$ e $(1, 2)$ sono di MAX. REL.

Avevamo già individuato il MIN. ASS. in $(-\frac{1}{2}, 0)$. Infatti $f(-\frac{1}{2}, 2) = -\frac{1}{4} + 8$

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

$f(-2, 2) = f(1, 2) = 10$ MAX. ASSOLUTO.

4) $\vec{F}$ è conservativo: infatti è irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ (sempl. lin. connesso): 5

$$X_y = z e^{yz} = Y_x$$

$$Y_z = x\left[e^{yz} + yz e^{yz}\right] = Z_y$$

$$X_z = y e^{yz} = Z_x$$

Si osservi inoltre che $\vec{F} = \vec{F}_1(x) + \vec{F}_2(x,y,z) + \vec{F}_3(z)$

con $\vec{F}_1(x) = (2x, 0, 0)$

$$\vec{F}_2(x) = \left(e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz}\right)$$

$$\vec{F}_3(x) = \left(0, 0, \frac{2z}{1+z^2}\right)$$

Ogni suo potenziale è pertanto

$$V(x,y,z) = x^2 + xe^{yz} + \ln(1+z^2) + C.$$

La curva γ non è chiusa:

$$\gamma(0) = (1,0,0) \; ; \; \gamma(1) = (-2,1,0)$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{ds} = V(-2,1,0) - V(1,0,0)$$

$$= (4-2) - (2) = 0.$$

5) L'equazione della superficie è

$$\Sigma : \begin{cases} x(t,\vartheta) = t\cos\vartheta \\ y(t,\vartheta) = t\sin\vartheta \\ z(t,\vartheta) = 4-t^2 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2 ; \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$$

La matrice jacobiana è

$$J(t,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & -2t \\ -t\sin\vartheta & t\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W(t,\vartheta) = \sqrt{t^2 + 4t^4\sin^2\vartheta + 4t^4\cos^2\vartheta} = \sqrt{t^2+4t^4}$$

$$= |t|\sqrt{1+4t^2} = t\sqrt{1+4t^2}$$

$$\Rightarrow \text{Area}\,\Sigma = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^2 dt\, t\sqrt{1+4t^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{12}\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

$$= \frac{\pi}{24}\left[(17)^{3/2} - 1\right].$$

6) Equazione omogenea associata:

$$y'' + y = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$\alpha^2+1=0 \qquad \Rightarrow \alpha_{1,2}=\pm i$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x).$$

Soluzione particolare dell'equazione non omogenea: metodo di somiglianza.
Poichè $\alpha = i$ è radice del polinomio caratteristico, allora

$$y_P(x) = x\left[A\cos x + B\sin x\right]$$

$$y_P' = x\left[-A\sin x + B\cos x\right] + A\cos x + B\sin x$$

$$y_P'' = x\left[-A\cos x - B\sin x\right] + 2\left[-A\sin x + B\cos x\right]$$

$$\Rightarrow y_P''+y_P = x\left[\cancel{-A\cos x - B\sin x + A\cos x + B\sin x}\right]$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{NO}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

$-6x$

$$y_{NO}'(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}x\sin x$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto la soluzione è ⑧

$$y(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

In alternativa, cerchiamo $y_P(x)$ col metodo di Lagrange:

$$|W(y_1, y_2)| = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$y_P(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

e

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{1}\,dx = -\int \sin^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x\cos x - x\right]$$

$$C_2(x) = \int \cos x \sin x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\Rightarrow y_P(x) = \frac{1}{2}\sin x\cos^2 x - \frac{1}{2}x\cos x + \frac{\sin^3 x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) - \frac{1}{2}x\cos x$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$$

GIÀ PRESENTE in $y_0(x)$

$$\Rightarrow y_{NO}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x.$$