SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 del 20/9/2024

1) $D_{conv} = \mathbb{R} - \{0\}$

$$e^{-\frac{n^2}{x}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ +\infty & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Pertanto, per $x>0$

$$\varphi_n(x) \sim \frac{1}{n^\alpha + n} \sim \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } \alpha<1 \\ \frac{1}{2n} & \text{se } \alpha=1 \\ \frac{1}{n^\alpha} & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

Pertanto, $D_{cp} = \begin{cases} (0,+\infty) & \text{se } \alpha>1 \\ \emptyset & \text{se } \alpha\le 1 \end{cases} = D_{c.a.}$

Poiché, per $x>0$, $0<e^{-\frac{n^2}{x}}<1$, allora

$$\sup|\varphi_n| = \sup_{x>0} \frac{1-e^{-\frac{n^2}{x}}}{n^\alpha+n} = \frac{1}{n^\alpha+n}$$

Pertanto $D_{c.T.} = D_{c.p.} = (0,+\infty)$ se $\alpha>1$.

2)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2y|+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^2y|+|xy|}{|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (|x^2|+|x|) = 0$$

f è CONTINUA in $(0,0)$.

$f(0,y) = f(x,0) = 0$

$\Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

DER. DIR.:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3\alpha^2\beta - t^2\alpha\beta}{t\sqrt{t^2(\alpha^2+\beta^2)}} = \lim \frac{\sqrt{t^2}\,(t\alpha^2\beta-\alpha\beta)}{|t|\,t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|}(t\alpha^2\beta - \alpha\beta) = -\alpha\beta \lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}$$

La der. direzionale non esiste se non per $\alpha = 0$ $(f_y(0,0)=0)$ e $\beta = 0$ $(f_x(0,0)=0)$.

Allora f NON è differenziabile.

Infatti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k - hk}{(h^2+k^2)} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}\left[\rho\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta\right]}{\cancel{\rho^2}} = -\sin\theta\cos\theta$$

NON ESISTE, PERCHÈ DIPENDENTE DA θ

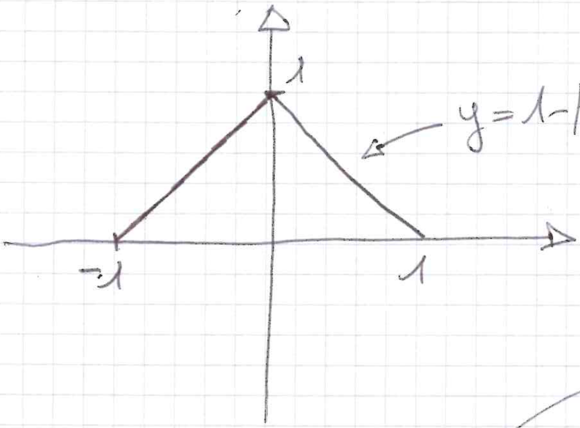
Di conseguenza, f NON è C^1.

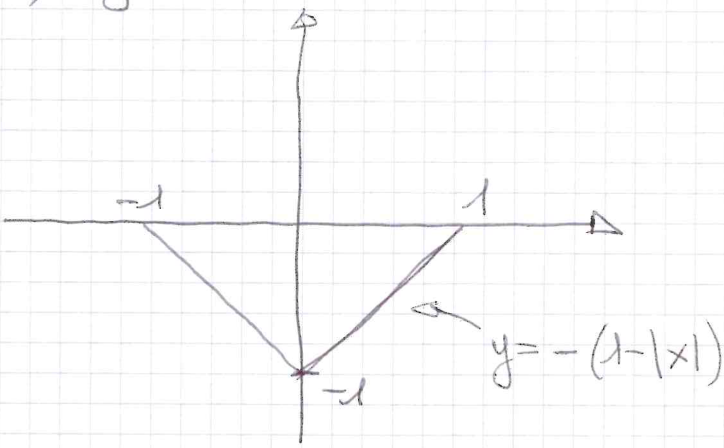
3) Estremi liberi:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x \\ f_y(x,y) = -1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \text{ PUNTI STAZIONARI.}$$

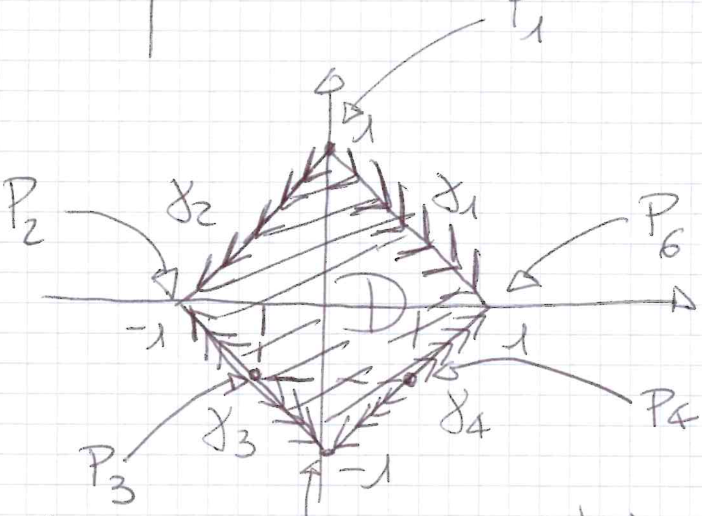
Dominio D:

$$-(1-|x|) \leq y \leq 1-|x|$$





D:



$\gamma_1: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = 1-x \end{cases}$; $\gamma_2: \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = 1+x \end{cases}$; $\gamma_3: \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = -1-x \end{cases}$

$\gamma_4: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = -1+x \end{cases}$

$$f\Big|_{\gamma_1} = x^2 - 1 + x \Rightarrow \left(f\Big|_{\gamma_1}\right)' = 2x+1 > 0 \quad \forall x > -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f\Big|_{\gamma_1}$ sempre crescente

$$f\Big|_{\gamma_2} = x^2-1-x \Rightarrow \left(f\Big|_{\gamma_2}\right)' = 2x-1>0 \iff x>\frac{1}{2}$$ 4

$$\Rightarrow f\Big|_{\gamma_2} \text{ sempre decrescente}$$

$$f\Big|_{\gamma_3} = x^2+1+x \Rightarrow \left(f\Big|_{\gamma_3}\right)' = 2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f\Big|_{\gamma_3}$ ~~sempre~~ decrescente per $-1<x<-\frac{1}{2}$ e crescente per $-\frac{1}{2}<x<0$

$$f\Big|_{\gamma_4} = x^2+1-x \Rightarrow \left(f\Big|_{\gamma_4}\right)' = 2x-1>0 \iff x>\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f\Big|_{\gamma_4}$ decrescente per $0<x<\frac{1}{2}$ e crescente per $\frac{1}{2}<x<1$

(Si osservi che $f(x,y)$ è simmetrica rispetto all'asse ~~x~~ y: $f(-x,y)=f(x,y)$).

Dalla figura si nota che

$P_1, P_3, P_4 \equiv \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ sono punti di MIN. REL.

$P_1 \equiv (0,1)$, $P_3 \equiv \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$P_2=(-1,0)$, $P_5=(0,-1)$, $P_6=(1,0)$ sono punti di MAX. REL.

$f(P_1)=f(0,1)=-1$ ← punto di MIN. ASS.

$$f(P_3)=f(P_4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

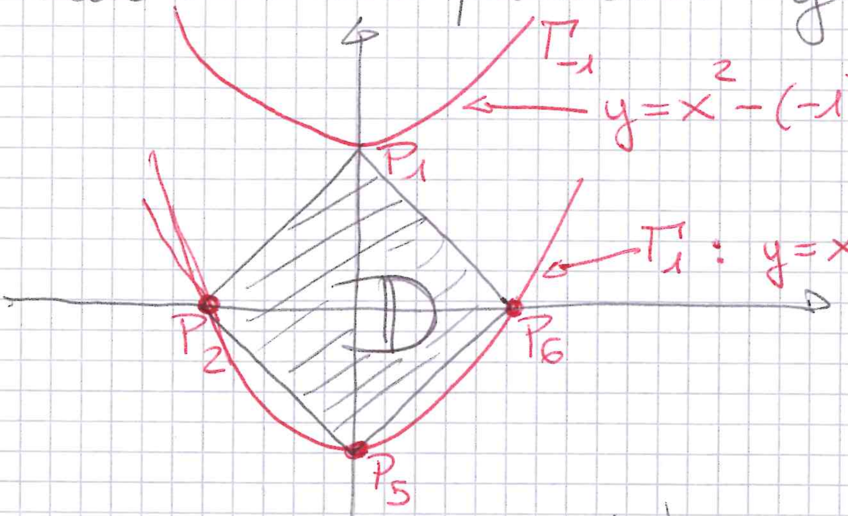
$f(P_2)=f(-1,0)=1$

$f(P_5)=f(0,-1)=1$; $f(P_6)=f(1,0)=1$] punti di MAX. ASS.

Si osservi che le curve di livello

$$\Gamma_c = \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y=c\}$$

sono date da parabole $y=x^2-c$



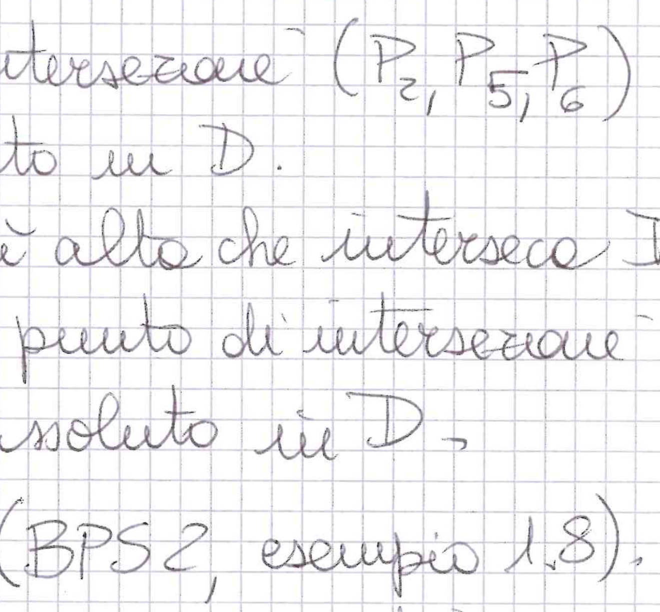
Più è alto c, più è bassa la parabola.

La parabola più bassa che interseca D ~~ha~~ ha equazione $y=x^2-1$. Nei punti di intersezione (P_2, P_5, P_6) f assume il max. assoluto in D.

~~Nel punto~~ La parabola più alta che interseca D ha equazione $y=x^2+1$. Nel punto di intersezione P_1 f assume il min. assoluto in D.

4) Il campo è ben noto (BPS2, esempio 1.8). Esso è irrotazionale, ma non conservativo.

Poiché l'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione $3x^2+4y^2=1$ gira attorno allo origine $(0,0)$,



$$\int_{\mathcal{E}} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right) = \int_{\mathcal{E}_r} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right) = 2\pi$$

dove C_r è una qualsiasi circonferenza di centro l'origine e raggio r. (6)

5) $\vec{r}'(t) = \begin{cases} x'(t) = e^t \\ y'(t) = e^t \\ z'(t) = 1 \end{cases}$; $\vec{r}''(t) = \begin{cases} x''(t) = e^t \\ y''(t) = e^t \\ z''(t) = 0 \end{cases}$

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ e^t & e^t & 1 \\ e^t & e^t & 0 \end{vmatrix} = -e^t \hat{i} + e^t \hat{j}$$

(N.B.: la curva è piana perché $y = x$)

$$\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\| = \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2}\, e^t$$

$$v(t) = \sqrt{2e^{2t}+1} \implies k(t) = \frac{\sqrt{2}\, e^t}{(2e^{2t}+1)^{3/2}}$$

$$k'(t) = \sqrt{2} \left[\frac{e^t (2e^{2t}+1)^{\cancel{3/2}} - e^t \frac{3}{2} \cancel{(2e^{2t}+1)^{1/2}} 4e^{2t}}{(2e^{2t}+1)^{\cancel{6/2}\, 5/2}} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, e^t}{(2e^{2t}+1)^{5/2}} \left(2e^{2t}+1-6e^{2t}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, e^t}{(2e^{2t}+1)^{5/2}} \left(1-4e^{2t}\right) > 0 \iff e^{2t} < \frac{1}{4}$$

$$\iff t < \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 2$$

Pertanto in $[1, +\infty)$ $k(t)$ è sempre decrescente

$$\max_{[1,+\infty)} k(t) = k(1) = \frac{\sqrt{2}\, e}{(2e^2+1)^{3/2}}$$ ⑦ ~~⑥~~

$$\lim_{t\to+\infty} k(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{8}\, e^{3t}} = 0$$

$$\Rightarrow \inf_{[1,+\infty)} k(t) = 0 \quad \text{ma} \quad \nexists \min_{[1,+\infty)} k(t)$$

6) EDO a variabili separabili, definita per $x \geq 0$; $y \geq 0$

Sol. singolare: $y = 0$ NON soddisfa il problema di Cauchy.

Separazione variabili $(y > 0)$:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int \sqrt{x}\, dx$$

$$2\sqrt{y} = -\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow 2 = -\frac{2}{3} + C \Rightarrow C = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y} = -\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{3} \geq 0 \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} \leq 4 \Rightarrow \cancel{x \leq 8} \quad x \leq \sqrt[3]{16}$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}\left(4 - x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$y = \frac{1}{9}\left(4 - x^{3/2}\right)^2$$ definita solo in $\left(0, \sqrt[3]{16}\right)$.

Si osservi che, data $y' = -\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$,

$f(x,y) = -\sqrt{x}\sqrt{y}$ è definita e continua

in $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

$$f_y(x,y) = \frac{-\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \in C^0\left([0,+\infty)\times(0,+\infty)\right).$$

Quindi il problema di Cauchy, centrato in $y_0 = 1$, ammette soluzione unica <u>LOCALE</u> (trattandosi di EDO a variabili separabili).
Infatti, come visto, la soluzione è definita solo in $(0, \sqrt[3]{16})$.