

SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 2 DEL 4/4/2025

①

$$1) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+2}}{k+1} = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^h}{h} \quad \text{serie a termini positivi}$$

RAGGIO DI CONVERGENZA:

$$|x^2| < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$x = \pm 1: \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{h} \text{ DIVERGENTE}$$

CONV. SEMPLICE e ASSOLUTA in $(-1, 1)$.

CONV. TOTALE e UNIFORME in ogni
 $[-h, h]$, con $0 < h < 1$.

$$\text{Somma: } \ln(1+t) = \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{h+1} t^h}{h}$$

$$\begin{aligned} \ln(1-t) &= \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{h+1} (-t)^h}{h} = \\ &= \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2h+1} t^h}{h} = - \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{t^h}{h} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^h}{h} = -\ln(1-x^2)$$

$$2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\sin(yx^2)}{x^2+y^2} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{yx^2}{x^2+y^2} \right| \quad (2)$$

$$\leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{yx^2}{x^2} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$$

f è CONTINUA in $(0,0)$.

$$f(x,0) = f(0,y) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

DER. DIREZIONALI:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^3 \beta \alpha^2)}{t \cdot t^2(\alpha^2 + \beta^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t^3} \beta \alpha^2}{\cancel{t^3}}$$

$$= \beta \alpha^2 \quad \forall (\alpha, \beta) \text{ t.c. } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Poiché non vale la formula del gradiente, allora f non è differenziabile in $(0,0)$.

Infatti:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(kh^2)}{\sqrt{h^2+k^2} \cdot (h^2+k^2)} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\cancel{\rho^3} \sin \cos^2 \vartheta}{\cancel{\rho^3}}$$

$$= \sin \cos^2 \vartheta \quad \text{dipendente da } \vartheta$$

$$\Rightarrow \text{NON differenziabile.}$$

$$3) \text{ In } \mathbb{D}: \begin{cases} f_x = -e^{-x-y} - 1 < 0 \\ f_y = -e^{-x-y} + 1 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f_x non si annulla mai $\Rightarrow$ ~~non~~ punti stazio-
nari.

lungo DD:

~~$$f|_{\delta_1} = e^{-x-1} - x + 1$$~~

~~$$f|_{\delta_1} = e^{-1-y} - 1 + y$$~~

$$y \in [-1, 1].$$

$$(f|_{\delta_1})' = -e^{-1-y} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-1-y} < 1$$

$$\Leftrightarrow -1-y < 0 \Leftrightarrow y > -1.$$

$$f|_{\delta_2} = e^{-x-1} - x + 1, \quad x \in [-1, 1]$$

$$(f|_{\delta_2})' = -e^{-x-1} - 1 < 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

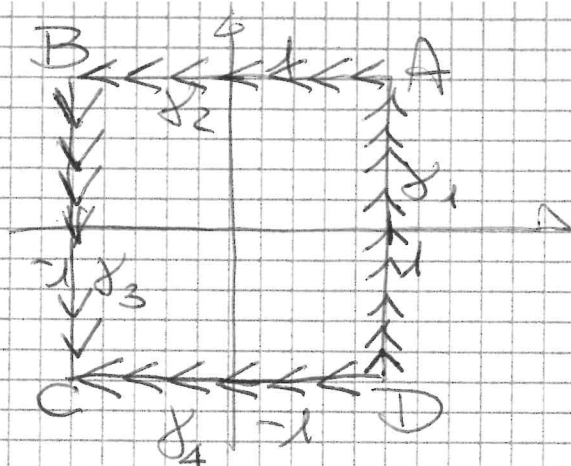
$$f|_{\delta_3} = e^{1-y} + 1 + y; \quad y \in [-1, 1]$$

$$(f|_{\delta_3})' = -e^{1-y} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{1-y} < 1$$

$$\Leftrightarrow 1-y < 0 \Leftrightarrow y > 1$$

$$f|_{\delta_4} = e^{-x+1} - x - 1; \quad x \in [-1, 1]$$

$$(f|_{\delta_4})' = -e^{-x+1} - 1 < 0 \quad \forall x \in [-1, 1].$$



(3)

~~Def~~ $D = (1, -1)$ punto di MIN. ASS. (4)

$$f(1, -1) = e^0 - 1 - 1 = -1$$

$C = (-1, -1)$ punto di MAX. ASS.

$$f(-1, -1) = e^2$$

$$4) 0 \leq \rho \leq \cos \vartheta \Rightarrow \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Area } D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\cos \vartheta} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left[\rho^2 \right]_0^{\cos \vartheta}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos 2\vartheta + 1] d\vartheta$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sin 2\vartheta + \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$X_B = \frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\cos \vartheta} \rho^2 \cos \vartheta d\rho = \frac{4}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta d\vartheta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\cos \vartheta}$$

$$= \frac{4}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 2\vartheta + 1}{2} \right)^2 d\vartheta$$

$$= \frac{1}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 2\vartheta + 2\cos 2\vartheta + 1] d\vartheta =$$

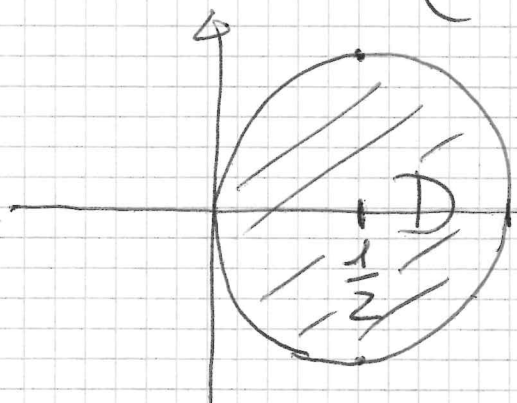
$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos 4\vartheta + 1}{2} \right] d\vartheta + \left[\sin 2\vartheta + \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] \quad (5) \\
 &= \frac{1}{3\pi} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \sin 4\vartheta + \vartheta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi \right] \\
 &= \frac{1}{3\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \pi \right] = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Per simmetria della figura $y_B = 0$.
 Si sarebbe potuto giungere allo stesso risultato riscrivendo la curva nella forma

$$\rho^2 = \rho \cos \vartheta \Rightarrow x^2 + y^2 = x \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

(CIRCONFERENZA)



Il baricentro del
 dominio contenuto
 nella circonferenza
 è ovviamente $B = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

$$5) \begin{cases} 3x = 3\cos t + 3 \\ 2y = 4 - 2\sin t \\ z = 3\cos t - 2\sin t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cos t = 3x - 3 \\ \cancel{3\cos t} - 2\sin t = 2y - 4 \\ \cancel{3\cos t} - 2\sin t = 2y - 4 \\ z = 3x - 3 + 2y - 4 + 2 \end{cases} \quad (6)$$

la curva è piana e giace sul piano

$$3x + 2y - z - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \pm \frac{1}{\sqrt{14}} (3, 2, -1). \text{ Ovviamente } \tau = 0.$$

la curva è chiusa: $\vec{r}(0) = (2, 2, 5) = \vec{r}(2\pi)$

Si può osservare che, poiché ~~che~~

$$\begin{cases} \cos^2 t = (x-1)^2 \\ \sin^2 t = (y-2)^2 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

Pertanto la curva può anche essere rappresentata nella forma

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 5 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases}$$

È dunque l'intersezione fra un piano e un cilindro circolare; cioè è una ELLISSE.

CURVATURA E VETTORE BINORMALE:

(4)

$$\vec{r}' = \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = -\cos t \\ z' = -3\sin t - 2\cos t \end{cases}; \quad \vec{r}'' = \begin{cases} x'' = -\cos t \\ y'' = +\sin t \\ z'' = -3\cos t + 2\sin t \end{cases}$$

$$\vec{r}' \wedge \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin t & -\cos t & -3\sin t - 2\cos t \\ -\cos t & \sin t & -3\cos t + 2\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} (3\cos^2 t - \cancel{2\cos t \sin t} + 3\sin^2 t + \cancel{2\cos t \sin t}) \\ + \hat{j} (\cancel{3\sin t \cos t} + 2\cos^2 t - \cancel{3\sin t \cos t} + 2\sin^2 t) \\ + \hat{k} (-\sin^2 t - \cos^2 t)$$

$$= 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{14}} (3, 2, -1).$$

$$v(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + (3\sin t + 2\cos t)^2} \\ = \sqrt{1 + 9\sin^2 t + 4\cos^2 t + 12\cos t \sin t}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{1 + (3\sin t + 2\cos t)^2}}$$

6) OROGENEA ASSOCIATA:

8

Eq. ne caratteristica: $x^3 - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2,3} = \pm 2$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

NON OROGENEA: metodo di similitudine.

Poiché $\alpha = i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, allora

$$y_p = A \cos x + B \sin x$$

$$y_p' = -A \sin x + B \cos x$$

$$y_p'' = -A \cos x - B \sin x$$

$$y_p''' = A \sin x - B \cos x$$

$$\Rightarrow A \sin x - B \cos x + 4A \sin x - 4B \cos x = \sin x$$

$$5A \sin x - 5B \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{5} \cos x$$

$$\Rightarrow y_{\text{tot}}(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{5} \cos x$$

$$y'(x) = 2C_2 e^{2x} - 2C_3 e^{-2x} - \frac{1}{5} \sin x$$

$$y''(x) = 4C_2 e^{2x} + 4C_3 e^{-2x} - \frac{1}{5} \cos x$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{1}{5} = 1 \\ y'(0) = 2C_2 - 2C_3 = 0 \\ y''(0) = 4C_2 + 4C_3 - \frac{1}{5} = 1 \end{cases}$$

9

$$\begin{cases} C_3 = C_2 \\ C_1 + 2C_2 = \frac{4}{5} \\ 8C_2 = \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = C_3 = \frac{3}{20} \\ C_1 = \frac{4}{5} - 2C_2 = \frac{4}{5} - \frac{6}{10} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} (e^{2x} + e^{-2x}) + \frac{1}{5} \cos x$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \operatorname{ch}(2x) + \frac{1}{5} \cos x$$

~~Si~~ Si sarebbe potuto giungere alla soluzione effettuando un abbassamento dell'ordine ($z = y'$) e risolvendo l'equazione di secondo ordine in z .