

SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 DEL 23/3/2025

$$1) \quad a_n = \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left[\frac{3}{n} - \frac{1}{6} \left(\frac{3}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]}{n^\alpha \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n}\right)^2} \quad (1)$$

$$\sim \frac{\left(\frac{9}{2n^2}\right)}{\left(\frac{2}{n^2}\right)n^\alpha} = \frac{9}{4n^\alpha}$$

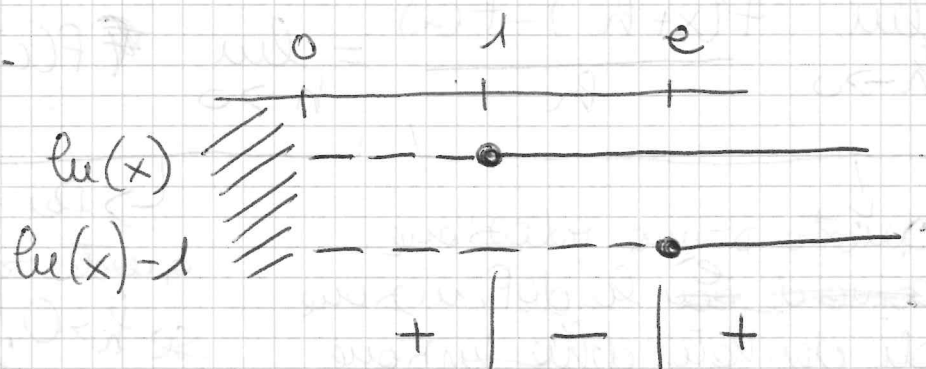
Quindi la serie converge per $\alpha > 1$
diverge per $\alpha \leq 1$.

$$2) \quad I_{\text{def}} = (0, +\infty)$$

No intersezione con asse y.

Intersezioni con asse x: $\ln(x)(\ln(x)-1) = 0$

$$\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = e.$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)(\ln(x)-1) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

AS. VERT. $x=0$ DA DESTRA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) = +\infty \quad (2)$$

Poiché $f(x) = \ln^2(x)$ è sublineare, non abbiamo asintoto obliquo.

$$f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} [2\ln(x) - 1] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$$

f decresce in $(0, \sqrt{e})$ e cresce in $(\sqrt{e}, +\infty)$

$x_3 = \sqrt{e}$ punto di MIN. ASSOLUTO

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Poiché f è illimitato superiormente, ~~non~~ f non ha MAX ASSOLUTO.

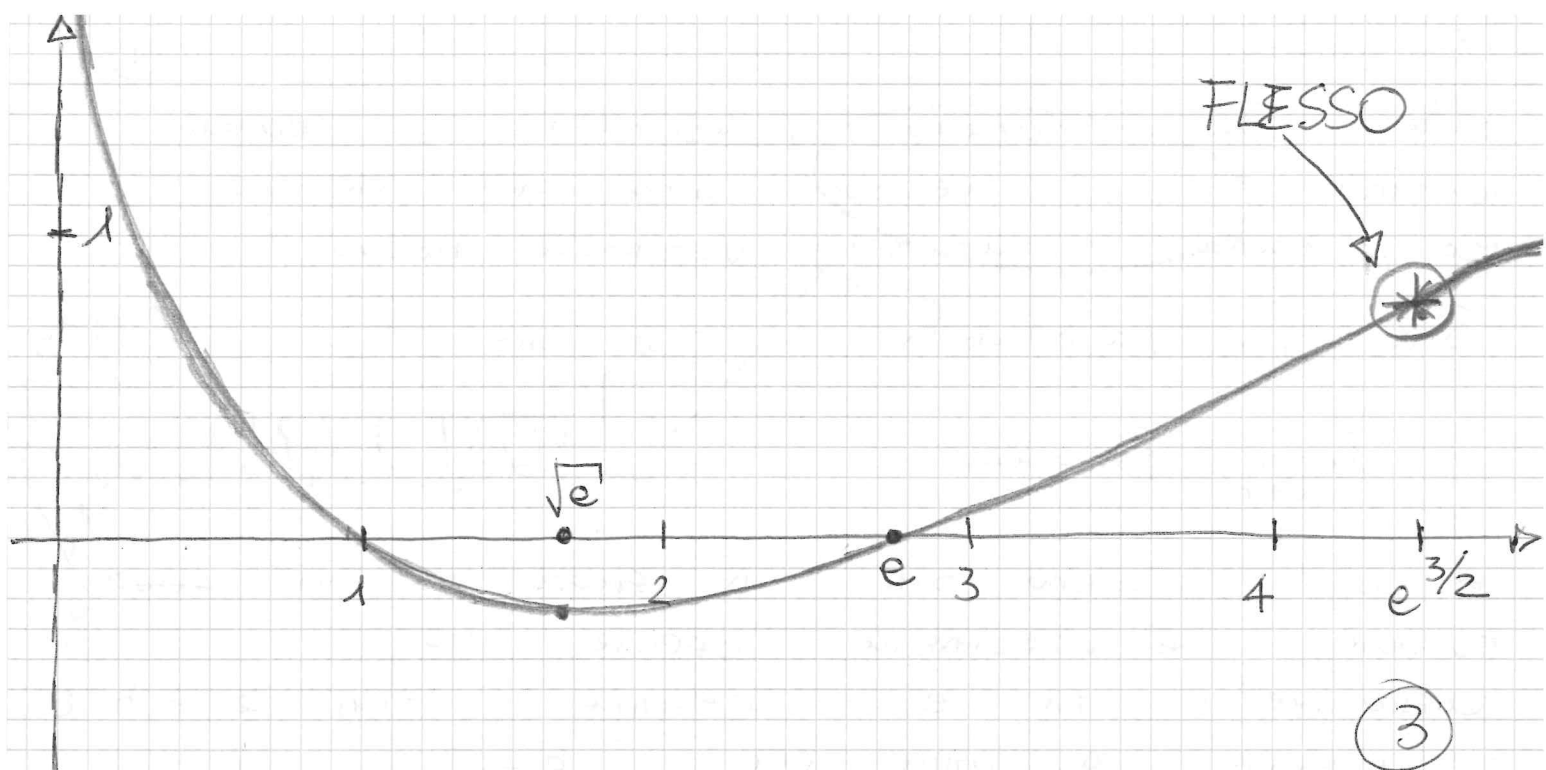
$$f''(x) = \frac{2 \frac{1}{x} - (2\ln(x) - 1)}{x^2} = \frac{3 - 2\ln(x)}{x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{3}{2}}$$

f convessa in $(0, e^{\frac{3}{2}})$ e concava in $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

$x_4 = e^{\frac{3}{2}}$ è punto di flesso obliquo discendente.

$$f(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$



3) $|z^2 + z + 1|(z - 1) = 0$

$z_1 = 1$

$|z^2 + z + 1| = 0 \iff z^2 + z + 1 = 0$

$z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$z_1 = \cos(0) + i \sin(0) = e^{i0}$

$z_2 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = e^{i\frac{2}{3}\pi}$

$z_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

4) Forma normale:

④

$$y'(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

L'equazione è definita in $\mathbb{R}$

$f(x) = a(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists!$ sol. $y \in C^1(\mathbb{R})$
(soluzione globale).

Possiamo però risolvere l'equazione considerando a variabili separabili:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} (1-y)$$

Poiché $B(y) = 1-y = 0 \Leftrightarrow y = 1$

allora l'unica soluzione del problema di

Cauchy è data dalla soluzione singolare
 $y = 1$.

5) $1 + e^{-x} = t$; $dt = -e^{-x}$

$$t(0) = 2 ; t(+\infty) = 1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_2^1 \frac{-dt}{t} = -\ln(t) \Big|_2^1$$

$$= \ln 2.$$