SVOLGIMENTI PROVA SCRITTA di ANALISI 1 dell' 11/2/2025.



1)

$$a_n = n^{12}\left[\frac{\left(n^8-\frac{1}{3^n}\right)-\left(n^8+\frac{1}{4^n}\right)}{\sqrt{n^8-\frac{1}{3^n}}+\sqrt{n^8+\frac{1}{4^n}}}\right]$$

$$= \frac{-n^{12}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)}{\sqrt{n^8-\frac{1}{3^n}}+\sqrt{n^8+\frac{1}{4^n}}}$$ (serie a termini di segno negativo)

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^{12}}{2n^4\cdot 3^n} = -\frac{n^8}{2\cdot 3^n}$$

Come si può facilmente dimostrare col criterio del rapporto o della radice, la generica serie

$\sum \frac{n^\alpha}{a^n}$, con $\alpha>0$, $a>1$, converge.

Pertanto la serie di partenza, per il criterio del confronto asintotico, converge.

2) Poiché il radicando è un modulo, la radice è sempre definita. $\Rightarrow D=\mathbb{R}$.

$f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f(0)=1$ ; $f(x)=0 \iff x=1$.

Poichè $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$, possiamo già concludere che $x=1$ è punto di MIN. ASSOLUTO.



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}\, e^{-2x} & \text{se } x \geq 1 \\ \sqrt{1-x}\, e^{-2x} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^{2x}} = 0$$ per la gerarchia degli infiniti.

$y=0$ AS. ORIZZONTALE A $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

La funzione è dunque ILLIMITATA SUP. MENTE.

La funzione, per $x \to -\infty$, è superlineare. Infatti

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left( \frac{\sqrt{|1-x|}}{x} \right) e^{-2x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-2x}}{\sqrt{|x|}} = +\infty$$ per la gerarchia degli infiniti.

Quindi la funzione non ammette asintoto obliquo.

<u>MONOTONIA</u>:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} e^{-2x} - 2e^{-2x}\sqrt{x-1} & \text{per } x > 1 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} e^{-2x} - 2e^{-2x}\sqrt{1-x} & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

③

$$= \begin{cases} \dfrac{(1-4(x-1))}{2\sqrt{x-1}\,e^{2x}} & \text{per } x>1 \\[2ex] \dfrac{-[1+4(1-x)]}{2\sqrt{1-x}\,e^{2x}} & \text{per } x<1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(5-4x)}{2\sqrt{x-1}\,e^{2x}} & \text{per } x>1 \\[2ex] \dfrac{4x-5}{2\sqrt{1-x}\,e^{2x}} & \text{per } x<1 \end{cases}$$

Si osservi che $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f'(x) = \dfrac{\pm 1}{2\cdot 0^+} = \pm\infty$

Quindi in $x=1$ la $f$ NON è derivabile e ha un punto cuspidale.

Per $x>1$ $\quad f'(x)>0 \iff 5-4x>0 \iff x<\frac{5}{4}$.

Per $x<1$ $\quad f'(x)<0$ sempre.

Quindi $f$ decresce in $(-\infty, 1)$. In $x=1$ si ha MIN. ASS.; cresce in $(1, \frac{5}{4})$. In $x=\frac{5}{4}$ si ha MAX. REL.; decresce in $(\frac{5}{4}, +\infty)$.

Come già detto, $\nexists$ MAX. ASS.

ANCHE SE NON RICHIESTO, completiamo lo studio del grafico con la concavità e convessità.

Con lunghi e noiosi calcoli, si può verificare che

$$f''(x) = \frac{16x^2-40x+23}{4\left(|x-1|\right)^{3/2} e^{2x}} \qquad \forall x \neq 1.$$

$$f''(x)=0 \iff 16x^2-40x+23=0$$

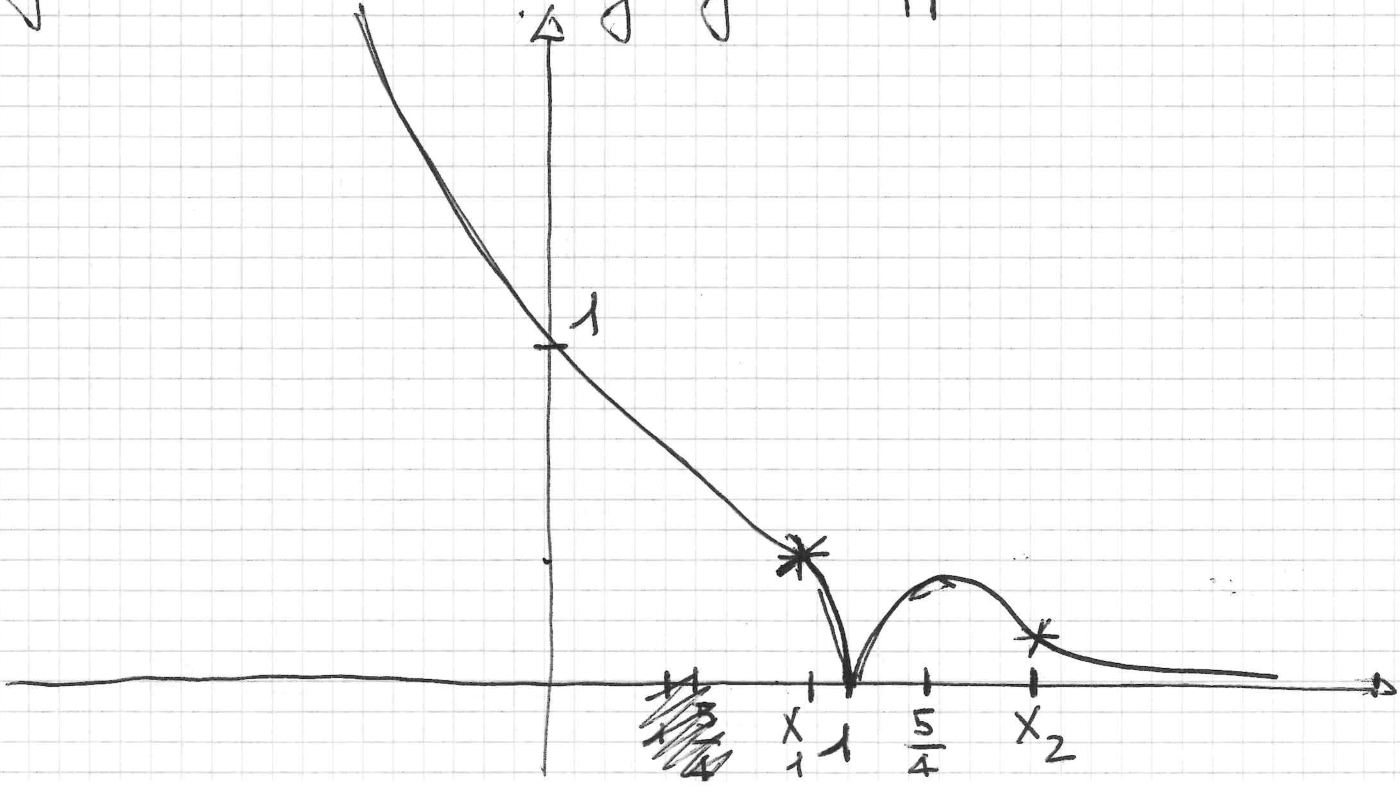
$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-16\cdot 23}}{16} = \frac{20 \pm \sqrt{32}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{4}$$

Si osservi che $x_1 = \frac{5-\sqrt{2}}{4} < 1$, mentre ovviamente $x_2 = \frac{5+\sqrt{2}}{4} > \frac{5}{4}$.

Pertanto $f'' > 0$ in $(-\infty, x_1)$ e in $(x_2 + \infty)$.

Quindi, ~~f è~~ ricordando il punto di cuspide in $x=1$, $f$ è convessa in $(-\infty, x_1)$; concava in $(x_1, 1)$; concava in $(1, x_2)$; convessa in $(x_2, +\infty)$.

$x_1$ è punto di flesso discendente; $x_2$ è punto di flesso ascendente. Grafico approssimativo:



3) $$1+i = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

5

$$(1+i)^4 = 4\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right]$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

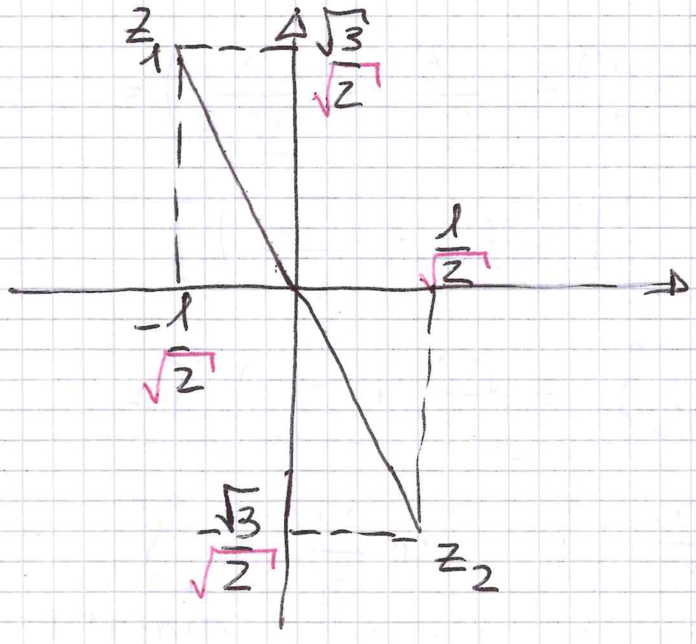
$$\Rightarrow \frac{(1+i)^4}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\cancel{4}^{\,2}\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right]}{\cancel{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$$= 2\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right] = w$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(1+i)^4}{1-\sqrt{3}}} = \sqrt{w} = \pm\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

$$= \pm\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \mp\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right] = z_{1,2}$$



5b

Come metodo alternativo, calcoliamo

$$(1+i)^4 = \left[(1+i)^2\right]^2 = (2i)^2 = -4$$

$$\sqrt{w} = \sqrt{\frac{-4}{1-i\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{-4(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}}$$

$$= \sqrt{\frac{-4(1+i\sqrt{3})}{4}} = \sqrt{2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt{\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right)}$$

$$= \pm\sqrt{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right] = \pm\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Oppure ancora, utilizzando gli esponenziali:

$$w = \frac{-4}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\pi}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\frac{e^{i\pi}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\Rightarrow \sqrt{w} = \pm\sqrt{2}\,e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

(6)

4) L'equazione è definita per $x \neq \pm 1$; $x \neq 2$. Poiché $x_0 = 3$, allora la soluzione sarà definita in $(2, +\infty)$. Poiché $\frac{2x}{x^2-1}$; $\frac{1}{x-2} \in C^\infty(2, +\infty)$ allora esiste una sola soluzione del problema in tutto $(2, +\infty)$ (sol. GLOBALE).

$$y(x) = e^{-\int_3^x \frac{2t}{t^2-1} dt} \left[ \int_3^x e^{\int_3^t \frac{2s}{s^2-1} ds} \frac{1}{t-2} dt \right]$$

$$= e^{-\ln(|t^2-1|)\Big|_3^x} \left[ \int_3^x e^{\ln(|s^2-1|)\Big|_3^t} \frac{1}{t-2} dt \right]$$

~~Poiché siamo~~ In $(2, +\infty)$ $x^2-1>0$, quindi possiamo togliere il modulo.

$$y(x) = e^{-\ln(x^2-1) + \ln 8} \left[ \int_3^x e^{\ln(t^2-1) - \ln 8} \frac{1}{t-2} dt \right]$$

$$= \frac{\cancel{8}}{(x^2-1)} \left[ \frac{1}{\cancel{8}} \int_3^x \frac{(t^2-1)}{t-2} dt \right] = \frac{1}{x^2-1} \left[ \int_3^x \left[ t+2+\frac{3}{t-2} \right] dt \right]$$

$$= \frac{1}{x^2-1} \left[ \frac{t^2}{2} + 2t + 3\ln(t-2) \right]_3^x$$

$$= \frac{1}{x^2-1} \left[ \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln(x-2) - \frac{9}{2} - 6 \right]$$

$$= \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln(x-2) - \frac{21}{2}\right].$$

5)

$$f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{x^{\alpha} \cdot \ln 2}{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \cancel{x}} = \frac{2\ln 2}{x^{2-\alpha}}$$

Pertanto $f$ è integrabile in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ se $g(x) = \frac{2\ln 2}{x^{2-\alpha}}$ è integrabile, cioè per $2-\alpha < 1$, ovvero $\alpha > 1$.