COMPITO D 17/1/2025 D_1

1) $\sin(x^3) - x^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9) - x^3$ per $x \to 0$

$$\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^9}{6}$$

$$\Rightarrow 1 - \exp\left(\sin(x^3) - x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \exp\left(\frac{-x^9}{6}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^9}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6x^{\alpha-9}}$$

Pertanto f è integrabile in $(0,1]$ per $\alpha - 9 < 1$ cioè per $\alpha < 10$; f non è integrabile in $(0,1]$ per $\alpha \geq 10$.

2) <u>Per $\alpha > 0$</u> $\quad \mathrm{Ch}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1 \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$

$$\Rightarrow \quad a_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha-2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \alpha > 1.$$

Per $\alpha = 0$ $\quad a_n = n^2\left[\mathrm{Ch}(1) - 1\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Per $\alpha < 0$ $\quad a_n = n^2\left[\mathrm{Ch}(n^{-\alpha}) - 1\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

La condizione necessaria è dunque rispettata solo per $\alpha > 1$. In tal caso $\sum a_n \approx \sum \frac{1}{2n^{2\alpha-2}}$

Pertanto $\sum a_n$ converge solo per $2\alpha-2>1$,
cioè $\alpha > \frac{3}{2}$.

D_2

3) $D = \{x \neq 2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$\cap$ asse y: $\quad f(0) = \frac{1}{2}$

$\cap$ asse x: $\quad f(x) = 0 \iff x = -1$.

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D$. $\quad x=-1$ punto di MIN. ASS.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} & \text{se } x \leq -1 \vee x > 2 \\ -\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = -\left[1 + \frac{3}{x-2}\right] & \text{se } -1 < x < 2. \end{cases}$$

$\lim_{x \to 2^\pm} f(x) = \left|\frac{3}{0^\pm}\right| = +\infty$ AS. VERT. $x=2$
da DX e da SX.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left|\frac{x}{x}\right| = 1$ AS. ORIZZ. $y=1$
per $x \to \pm\infty$.

MONOTONIA:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-3}{(x-2)^2} < 0 & \text{se } x < -1 \vee x > 2 \\ \frac{3}{(x-2)^2} > 0 & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}$$

f decresce in $(-\infty, -1)$; cresce in $(-1, 2)$;
decresce in $(2, +\infty)$.

Come detto, $x=-1$ punto di MIN. ASS.

Poichè $\lim_{x \to 2^\pm} f(x) = +\infty$, $\nexists$ MAX. ASS. $\quad D_3$

f è derivabile $\forall x \in D$, tranne $x = -1$

$f'_\pm(-1) = \lim_{x \to -1^\pm} f'(x) = \pm \frac{1}{3}$ PUNTO ANGOLOSO.

<u>ANCHE SE NON RICHIESTO</u>, completiamo lo studio del grafico di f.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{(x-2)^3} & \text{se } x<-1 \vee x>2 \\[2mm] \dfrac{-6}{(x-2)^3} > 0 & \text{se } -1<x<2 \end{cases}$$

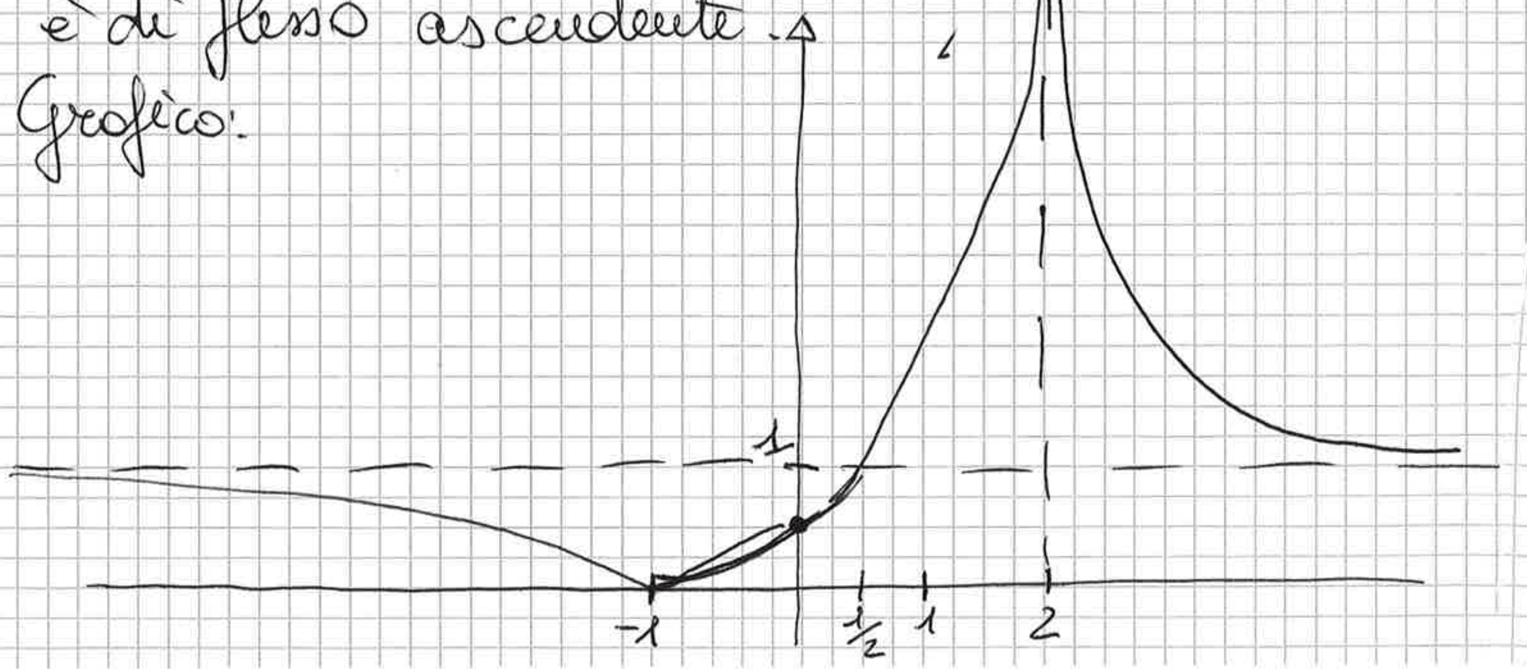
$f''(x) < 0$ per $x<-1$; $f''(x)>0$ $\forall x \in (-1,2)$;

$f''(x)>0$ per $x>2$.

Dunque f è concava in $(-\infty,-1)$; convessa in $(-1,2)$; convessa in $(2,+\infty)$.

Anche se f non è derivabile in $x=-1$, tale punto è di flesso ascendente.

Grafico:



4) $\dfrac{z-2i}{\bar{z}+1} = \dfrac{x+i(y-2)}{(x+1)+iy}$ $\qquad z \neq -1$ $\qquad D_4$

$$= \frac{[x+i(y-2)][(x+1)-iy]}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-2i}{z+1}\right) = \frac{x(x+1)+y(y-2)}{(x+1)^2+y^2} = 2$$

$$x^2+x+y^2-2y = 2(x^2+2x+1)+2y^2$$

$$x^2+y^2+4x+2-x+2y=0$$

$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2y+1-1+2=0$$

$$\underline{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2 = \frac{9}{4}-1 = \frac{5}{4}},$$

Circonferenza di centro $C \equiv \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ e di raggio $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$, PRIVA DEL PUNTO $z=-1$.

5) OMOGENEA ASSOCIATA:

$2\alpha^2-\alpha=0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} \; ; \; \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2$$

NON OMOGENEA: Metodo di somiglianza.

Poiché $\alpha=0$ è radice del polinomio caratteristico, con $m_a=1$, allora

$y_p(x) = x(Ax+B) = Ax^2+Bx$ D_5

$y_p'(x) = 2Ax+B$

$y_p''(x) = 2A$

$\Rightarrow \quad 4A - 2Ax - B = x+2$

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 4A - B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 4A-2 = -4 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_{NO}(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 - \frac{1}{2}x^2 - 4x$

$y(0) = C_1 + C_2 = 0$

$y_{NO}'(x) = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} - x - 4$

$y'(0) = \frac{1}{2} C_1 - 4 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 8 \\ C_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow y(x) = 8e^{\frac{1}{2}x} - 8 - \frac{1}{2}x^2 - 4x$