$\boxed{\text{COMPITO B}}$ 17/1/2025

B1

1) $D=\{x\neq -1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$f(x)\geq 0 \quad \forall x\in D.$

$\cap$ asse y: $f(0)=|-2|=2.$

$\cap$ asse x: $f(x)=0 \iff x=2.$ (PUNTO DI MIN. ASS.)

$\lim_{x\to -1^\pm} f(x)=\left|\frac{-2}{0^\pm}\right|=+\infty$ $\quad x=-1$ AS. VERT. DA DX e DA SX.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{x}{x}\right|=1$ $\quad y=1$ AS. ORIZZ. A $\pm\infty$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x+1}=1-\frac{3}{x+1} & \text{per } x<-1 \vee x\geq 2\\ \frac{2-x}{x+1}=-\left[1-\frac{3}{x+1}\right] & \text{per } -1<x<2.\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{(x+1)^2}>0 & \text{per } x<-1 \vee x>2\\ -\frac{3}{(x+1)^2}<0 & \text{per } -1<x<2.\end{cases}$$

f cresce in $(-\infty,-1)$; decresce in $(-1,2)$; cresce in $(2,+\infty)$.

$x=2$ punto di MIN. ASS.

f è derivabile in tutto il dominio tranne $x=2$:

$f'_\pm(2)=\lim_{x\to 2^\pm} f'(x)=\pm\frac{1}{3}.$ (PUNTO ANGOLOSO)

ANCHE SE NON RICHIESTO, completiamo lo studio del grafico:

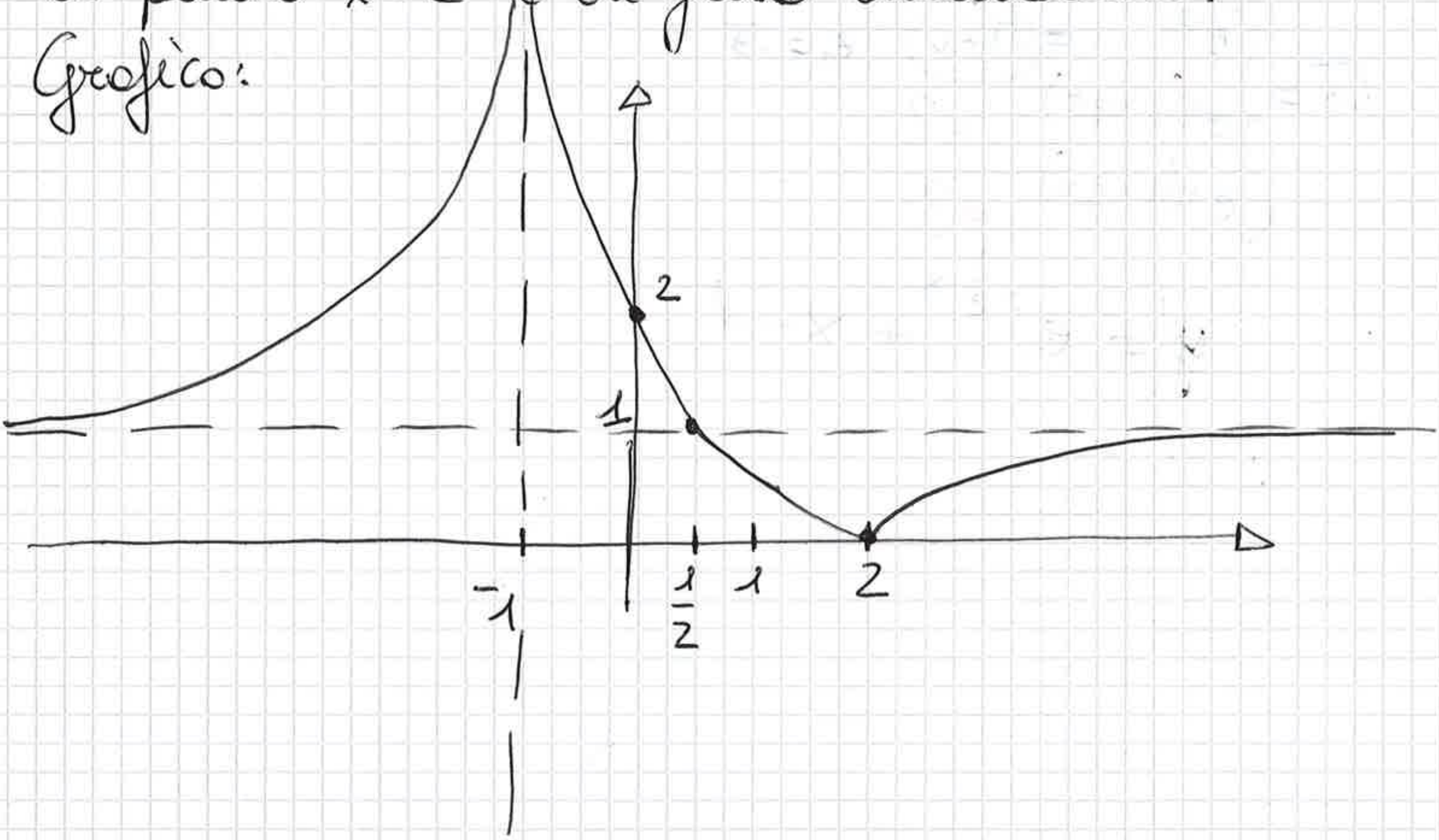
(B₂)

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-6}{(x+1)^3} & \text{per } x<-1 \vee x>2 \\ \dfrac{6}{(x+1)}>0 & \forall x\in(-1,2). \end{cases}$$

Per $x<-1$ $f''(x)>0$; per $x>2$ $f''(x)<0$; per $x\in(-1,2)$ $f''(x)>0$.

Dunque f è convesso in $(-\infty,-1)$ e in $(-1,2)$, mentre è concavo in $(2,+\infty)$. Anche se $\nexists f''(2)$, il punto $x=2$ è di flesso discendente.

Grafico:



2) $$\frac{2z-1}{z-i} = \frac{(2x-1)+2iy}{x+i(y-1)} \qquad z\neq i$$

B_3

$$= \frac{[(2x-1)+2iy][x+i(1-y)]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2z-1}{z-i}\right) = \frac{(1-y)(2x-1)+2xy}{x^2+(y-1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x-1 \overset{+y}{} \cancel{-2xy}\cancel{+2xy} = x^2+y^2-2y+1$$

$$\cancel{x^2-2x+1+y^2-2y+1=0} \qquad x^2-2x+1+$$

$$\cancel{(x-1)^2+(y-1)^2=0} \qquad y^2-3y+1=0$$

$$(x-1)^2+y^2-3y+\frac{9}{4}+1-\frac{9}{4}=0$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

Circonferenza di centro $C \equiv \left(1, \frac{3}{2}\right)$ e di raggio $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$, TRANNE IL PUNTO $z=i$.

3) OMOGENEA ASSOCIATA:

$$2\alpha^2+\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\ ; \ \alpha_2 = 0.$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2$$

NON OMOGENEA: Metodo di somiglianza.

Poiché $\alpha=0$ è radice del polinomio caratteristico con $m_\alpha = 1$, allora

$$y_P(x) = x(Ax+B) = Ax^2+Bx$$

$$y_P'(x) = 2Ax+B$$

$$y_P''(x) = 2A.$$

$4A + 2Ax + B = x + 1$ $\quad$ B4

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 4A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 - 4A = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{NO}(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 + \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y'_{NO}(x) = -\frac{1}{2}C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + x - 1$$

$$y'(0) = -\frac{1}{2}C_1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 2 + \frac{1}{2}x^2 - x$$

4) $$x^2 - \ln(1+x^2) = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} \operatorname{Sh}\left(\frac{x^4}{2}\right) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2x^{\alpha-4}}$$

Pertanto f è integrabile in $(0,1]$ se $\alpha - 4 < 1$ cioè se $\alpha < 5$; f non è integrabile in $(0,1]$ se $\alpha \geq 5$.

$\textcircled{B_5}$

5) Si osservi che

per $\alpha > 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} n\left[1-\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^{2\alpha}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^{2\alpha-1}} = 0 \iff \alpha > \frac{1}{2}.$$

Per $\alpha = 0$ $\quad a_n = n\underbrace{\left[1-\cos(1)\right]}_{\neq 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Per $\alpha < 0$ $\quad \nexists \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n.$

Pertanto $a_n \to 0$ solo $\forall \alpha > \frac{1}{2}$. Per tali valori

$$a_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha-1}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge se $2\alpha - 1 > 1$, cioè $\underline{\alpha > 1}$