SVOLGIMENTI PROVA DI ESONERO di ANALISI 1 del 17/1/2025.

$\textcircled{A_1}$

$\boxed{\text{COMPITO A}}$

1)

$$\frac{(n^2+1)2}{n^\alpha} \leq a_n \leq \frac{(n^2+1)4}{n^\alpha}$$

~~Per α~~ $\frac{(n^2+1)}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ pertanto

~~Pertanto, se~~ $\sum \frac{(n^2+1)}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{converge se } \alpha>3 \\ \text{diverge se } \alpha\leq 3 \end{cases}$

Dunque

<u>per $\alpha>3$</u> $\sum a_n \leq 4\sum \frac{(n^2+1)}{n^\alpha}$ convergente

<u>per $\alpha\leq 3$</u> $2\sum\frac{(n^2+1)}{n^\alpha} \leq \sum a_n$ divergente.

2) DOMINIO: $2x^2-2x+1>0$ $\quad\Delta<0$ vero $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow D=\mathbb{R}$

$\cap$ con asse y: $f(0)=\ln 1=0$

$\cap$ con asse x: $f(x)=0 \iff 2x^2-2x+1=1$

$\iff x(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0\ ;\ x_2=1.$

Segno: $f(x)>0 \iff 2x^2-2x+1>1$

$\iff x<0 \vee x>1.$

A_2

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

$\nexists$ asintoto obliquo. Infatti $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(2x^2)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0.$$

MONOTONIA: $f'(x) = \frac{4x-2}{2x^2-2x+1} = \frac{2(2x-1)}{2x^2-2x+1} \geq 0$

$0 < \{ 2x^2-2x+1$

$\iff x \geq \frac{1}{2}$.

f decresce in $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ e cresce in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

$x = \frac{1}{2}$ è punto di MIN. ASS. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} - 1 + 1\right)$

$= -\ln 2 < 0.$

Poichè $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\nexists$ punti di MAX. ASS.

CONVESSITÀ:

$$f''(x) = 2\left[\frac{2(2x^2-2x+1) - (2x-1)2(2x-1)}{(2x^2-2x+1)^2}\right]$$

$$= 4\left[\frac{2x^2-2x+\cancel{1}-4x^2+4x-\cancel{1}}{(2x^2-2x+1)^2}\right] = -8\left[\frac{x^2-x}{(2x^2-2x+1)^2}\right] \geq 0$$

$\iff x(x-1) \leq 0$

$\Rightarrow$ ~~f convessa in~~ f concava in $(-\infty, 0)$;

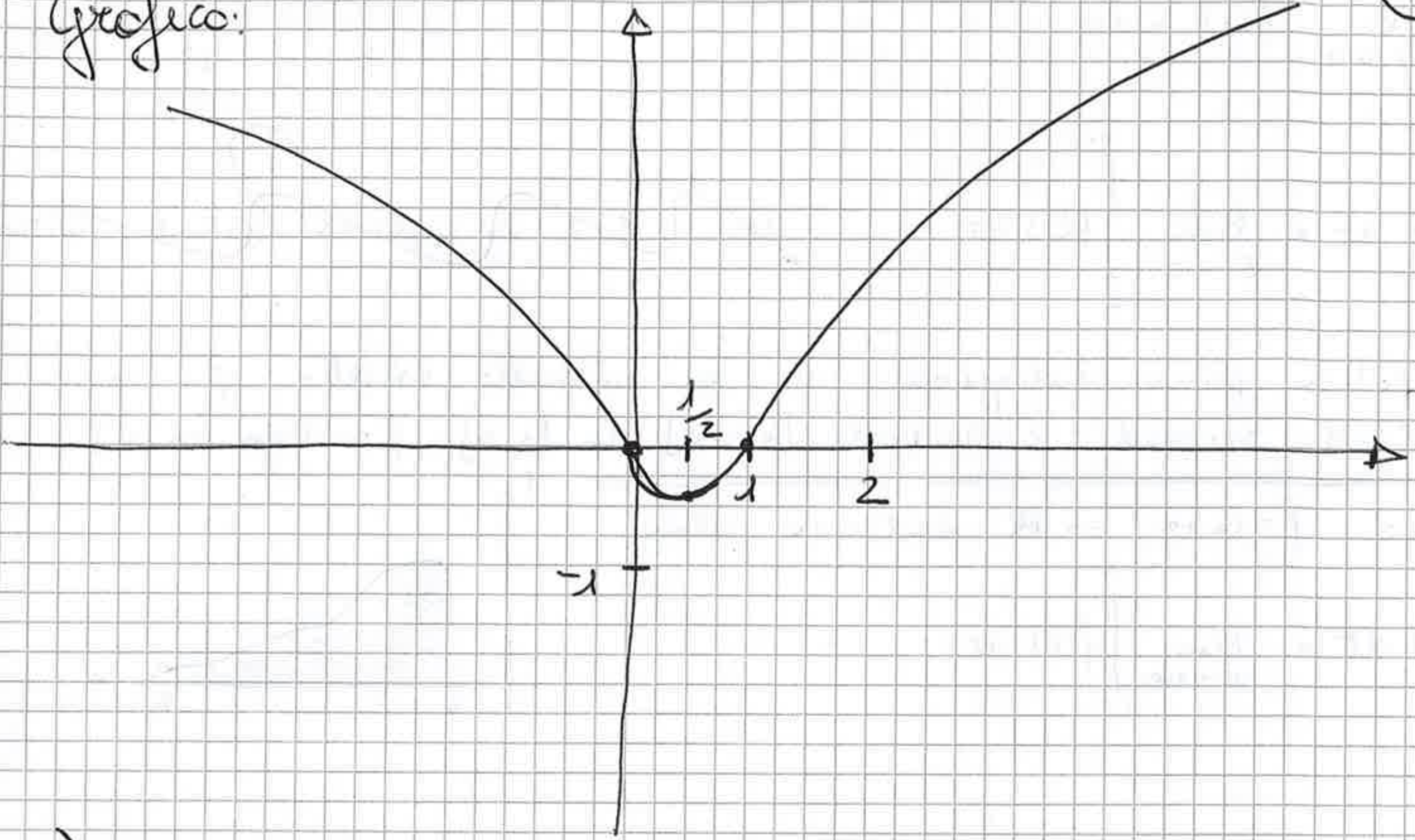
convessa in $(0,1)$; concava in $(1,+\infty)$.

$x = 0$ punto di flesso obliquo ascendente;

$x=1$ punto di flesso obliquo discendente.

A3

Grafico:



3)
$$\frac{2z+2}{z-2i}=\frac{(2x+2)+2iy}{x+i(y-2)} \qquad (z\neq 2i)$$

$$=\frac{[(2x+2)+2iy][x+i(2-y)]}{x^2+(y-2)^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{2z+2}{z-2i}\right)=\frac{(2x+2)(2-y)+2xy}{x^2+(y-2)^2}=1$$

$$4x\cancel{-2xy}\cancel{+4}-2y\cancel{+2xy}=x^2+y^2-4y\cancel{+4}$$

$$x^2-4x+y^2-2y=0$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1-5=0$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5$$

Circonferenza di centro $C \equiv (2;1)$ e raggio $r = 5$, <u>TRANNE IL PUNTO $z = 2i$.</u>

A4

4) OMOGENEA ASSOCIATA:

$$4\alpha^2 - 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} \;;\; \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow y_0(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2$$

NON OMOGENEA: Metodo di somiglianza:
poiché $\alpha = 0$ è radice del polinomio caratteristico, con $m_a = 1$, $\Rightarrow y_P(x) = x\,(Ax+B) = Ax^2 + Bx$

$$y_P'(x) = 2Ax + B$$

$$y_P''(x) = 2A$$

$$\Rightarrow 8A - 4Ax - 2B = -x + 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ 8A - 2B = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = 4A - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{NO}(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y_{NO}'(x) = \frac{1}{2} C_1 e^{1/2 x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y'(0) = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

A_5

$$y(x) = -e^{\frac{1}{2}x} + 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

5) $$1 + \mathrm{Sh}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6x^6} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

per $x \to +\infty$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{6x^6}$$

$$\Rightarrow f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{6x^6}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^{6-\alpha}}$$

Pertanto $f(x)$ è integrabile in $[1, +\infty)$ se $6-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 5$,
non è integrabile in $[1, +\infty)$ $\forall \alpha \geq 5$.