

Nome, Cognome e Matricola

---

Esame scritto di Geometria  
Ingegneria chimica  
Terzo appello aa: 2023/24  
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

17 giugno 2024

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

1. (2 punti) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo  $T$  di vertici  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .
2. (2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse  $s_1$  del segmento  $\overline{P_1P_2}$  e dell'asse  $s_2$  del segmento  $\overline{P_1P_3}$ .
3. (1 punto) Calcolare il circocentro  $C$  del triangolo  $T$ .
4. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza  $\mathcal{C}$  circoscritta al triangolo  $T$ .
5. (1 punto) Trovare il punto  $P_4$  ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto  $P_2$  attraverso la retta passante per  $P_1$  e  $P_3$ .

Fare un disegno che illustri la situazione.

**Esercizio 2.** In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. (1 punto) Calcolare  $v_1 \wedge v_2$ .
2. (2 punti) Calcolare la distanza di  $P$  dal piano  $\pi_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$ .
3. (1 punto) Consideriamo il piano affine  $\pi = P + \pi_0$  e la retta affine  $r = (P - v_1) + \langle v_1 + v_2 \rangle$ . Stabilire la posizione reciproca di  $r$  e  $\pi$  senza cambiare la loro forma.
4. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane di  $\pi$ .
5. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta  $s$  passante per i punti  $P$  e  $Q = v_1 + v_2$ .
6. (1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di  $P$  su  $\pi_0$ .

**Esercizio 3.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il determinante di  $A$ .*
2. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .*
3. (1 punto) *Stabilire se  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  è un autovettore per  $A$ .*
4. (1 punto) *Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .*
5. (1 punto) *Calcolare  $A^{-1}$  con il teorema di Cayley-Hamilton.*
6. (1 punto) *Calcolare  $A^3$ .*
7. (1 punto) *Nello spazio vettoriale delle matrici  $3 \times 3$  a coefficienti reali, si consideri il sottospazio vettoriale  $U = \text{Span}(\mathbf{1}_3, A, A^2, A^3, \dots, A^{100})$ . Trovare una base di  $U$ .*

**Esercizio 4.** Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da

$$f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare  $f \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

2. (1 punto) Dimostrare che  $f$  è lineare.

3. (1 punto) Trovare la matrice  $A$  associata ad  $f$  nelle basi standard.

4. (1 punto) Sia  $\mathcal{B} = \left( v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Dimostrare che  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

5. (1 punto) Sia  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'unica funzione lineare tale che

$$\begin{aligned} g(e_1) &= v_1 + v_2 - v_3, \\ g(e_2) &= 2v_1 - 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Calcolare la matrice  $C$  associata a  $g$  nella base standard di  $\mathbb{R}^2$  e nella base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$ .

6. (1 punto) Calcolare la matrice  $D$  associata a  $f \circ g$  nella base standard di  $\mathbb{R}^2$ .

7. (1 punto) Se  $D$  è invertibile calcolare  $D^{-1}$ , altrimenti calcolare una base del suo nucleo.

**Esercizio 5.** Consideriamo il seguente piano di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

1. (4 punti) Calcolare la matrice  $P_U$  di proiezione ortogonale su  $U$ .

2. (3 punti) Calcolare la distanza del vettore  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  da  $U$ .