Esame scritto di Geometria.
Ingegneria chimica.
Primo appello a.a. 2024/25.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

20 gennaio 2025

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $A = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il punto medio* M *del segmento* $\overline{AB}$.
2. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse* s *del segmento* $\overline{AB}$.
3. *(1 punto) Calcolare il punto* C *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine* O *attraverso l'asse* s.
4. *(1 punto) Stabilire se il quadrilatero* $ABOC$ *è un quadrato.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrilatero* $ABCO$.
6. *(1 punto) Scrivere la matrice* R_θ *di rotazione in senso anti-orario di un angolo* θ.
7. *(1 punto) Dimostrare che date due isometrie* f *e* g *di* $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ *la loro composizione* $f \circ g$ *è ancora un'isometria.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$.

1. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
2. *(1 punto) Trovare l'equazione equazione cartesiana del piano* $\pi = P_1 + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* v_1, v_2 *e* $v_1 + v_2$.
6. *(1 punto) Siano* $r = P + \langle v \rangle$ *ed* $s : AX = b$ *due rette di* $\mathbb{R}^3$*. Scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di* r *ed* s *e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.*
7. *(1 punto) E' vero che* $(v \wedge w) \wedge u = v \wedge (w \wedge u)$*? Se l'affermazione è vera, dimostrarla, altrimenti, esibire un contro-esempio.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -18 & 3 & 6 \\ -12 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Trovare una base di* $ker(A)$.
2. *(1 punto) Trovare una base di* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di* A.
4. *(1 punto) Stabilire se* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$ *e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^{-1}AB = D$.
5. *(1 punto) Calcolare* A^n *per ogni* $n \geq 1$.
6. *(1 punto) Enunciare la formula della dimensione per un'applicazione lineare* $f : V \to W$.
7. *(1 punto) Dare un'idea di come si dimostra la formula della dimensione.*

Esercizio 4. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. *Consideriamo la funzione* $f : V \to V$ *data da*

$$f(p(x)) = (x+1)p(x-1) + p(1) + p'(x^2-1) - xp(x)$$

1. *(1 punto) Calcolare* $f(2 + x - 3x^2)$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* f *è lineare.*
3. *(1 punto) Calcolare la matrice* A *associata ad* f *nella base standard di* V.
4. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B}_{Ker(f)}$ *del nucleo di* f.
5. *(1 punto) Trovare una base* $\mathcal{B}_{Im(f)}$ *dell'immagine di* f.
6. *(1 punto) Calcolare la matrice* C *associata ad* f *nella base* $\mathcal{B} = (1 + x, 1 + 2x, -x + x^2)$ *di* V *(sia in partenza che in arrivo).*
7. *(1 punto) Dimostrare che il nucleo di un'applicazione lineare* $f : V \to W$ *è un sottospazio vettoriale di* V.

Esercizio 5. *Si consideri il vettore* $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ *e la matrice* $A = vv^t$.

1. *(1 punto) Calcolare* A.
2. *(1 punto) Trovare una base per* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_{Ker(A)}$ *del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Calcolare lo spettro di* A.
6. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^tAB = D$.
7. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_v *di proiezione ortogonale sulla retta generata da* v *e la distanza del punto* $Q = (8, 4, -4, 4)^t$ *dall'iperpiano* $\pi = v^{\perp}$.