Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio
Appello di giugno 2022
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli, Marco Trevisiol

6 giugno 2022

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per* P_1 *e* P_2.

2. *(2 punti) Trovare due punti distinti* Q_1 *e* Q_2 *tali che i triangoli* $Q_1P_1P_2$ *e* $Q_2P_1P_2$ *siano equilateri.*

3. *(1 punto) Dimostrare che esiste una circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrilatero* $Q_1P_1Q_2P_2$. *Determinare il centro* C *ed il raggio* r *di* $\mathcal{C}$.

4. *(1 punto) Determinare l' equazione cartesiana di* $\mathcal{C}$.

5. *(1 punto) Sia* $Q_\theta = C + rP_\theta$, *dove* $P_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)^t$, *un punto della circonferenza* $\mathcal{C}$. *Disegnare* Q_0, $Q_{\pi/4}$ *e* $Q_{\pi/2}$. *Stabilire i valori dell'angolo* θ *per i quali* Q_θ *appartiene ai lati del quadrilatero* $Q_1P_1Q_2P_2$.

Fare un disegno (possibilmente usando riga e compasso) che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *si considerino i quattro punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Dimostrare che* P_1, P_2 *e* P_3 *non sono allineati.*
2. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano* π *passante per* P_1, P_2 *e* P_3*.*
3. *(1 punto) Calcolare la matrice* P_{π_0} *di proiezione ortogonale sul sottospazio di giacitura* π_0 *di* π*.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza di* Q *da* π*.*
5. *(1 punto) Calcolare il volume della piramide avente come vertici* P_1, P_2, P_3 *e* Q*. (Può essere utile ricordare che il volume della piramide è base per altezza diviso tre.)*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante e la traccia di A.*
2. *(1 punto) Stabilire se A è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.*
3. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
4. *(3 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.*

Esercizio 4. *Siano $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ gli spazio vettoriali reali dei polinomi di grado ≤ 2 e ≤ 4 a coefficienti reali, rispettivamente. Consideriamo la funzione $F : V \to W$ data da*

$$F(p(x)) = p(x^2) - p(x).$$

1. *(1 punto) Dimostrare che F è lineare.*
2. *(1 punto) Calcolare $F(x^2 - 1)$.*
3. *(2 punti) Scrivere la matrice associata ad F nelle basi standard.*
4. *(3 punti) Calcolare basi di nucleo ed immagine di F.*

Esercizio 5. *Si consideri la seguente funzione bilineare in tre variabili reali*

$$b(X,Y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

1. *(2 punti) Scrivere la matrice A associata a b nella base standard di $\mathbb{R}^3$.*
2. *(2 punti) Trovare una base ortogonale di $(\mathbb{R}^3, b)$.*
3. *(1 punto) Calcolare la segnatura di b.*
4. *(1 punto) Trovare una base di Sylvester associata a b.*
5. *(1 punto) Siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ i tre autovalori della matrice A trovata al punto 1. Stabilire se $\lambda_1\lambda_3 \geq 0$.*