Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Appello di Febbraio 2022

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

14 febbraio 2022

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i due punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per* P_1 *e* P_2.
2. *(1 punto) Trovare due punti* P_3 *e* P_4 *tali che il quadrilatero di vertici* P_1, P_2, P_3 *e* P_4 *sia un quadrato ed abbia il segmento* $\overline{P_1P_2}$ *come* diagonale.
3. *(2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrato trovato al punto precedente.*
4. *(3 punti) Sia* $\mathcal{C}(C, r)$ *una qualunque circonferenza di centro* C *e raggio* r. *Dimostrare un teorema di Talete che dice che dato comunque un diametro* $\overline{Q_1Q_2}$ *di* $\mathcal{C}(C, r)$ *ed un punto* P *di* $\mathcal{C}(C, r)$ *diverso da* Q_1 *e* Q_2, *il triangolo di vertici* Q_1, P *e* Q_2 *è rettangolo in* P.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *si considerino* $n = (1, 2, 3)^t$ *e* $P = (1, 2, -1)^t$.

1. *(2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane del piano* π *passante per* P *ed avente* n *come vettore normale.*
2. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *ottenuta come intersezione di* π *con il piano* $\sigma : x + y + z = 1$.
3. *(2 punti) Calcolare la distanza di* P *da* r.
4. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* P *sul piano* σ.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro di A.*
2. *(2 punti) Calcolare una base di ogni autospazio di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se gli autospazi di A sono ortogonali tra loro.*
4. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Consideriamo le seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_A$ di $Col(A)$ ed una base $\mathcal{B}_C$ di $Col(C)$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che A, C ed I sono simili.*
3. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_A \cup \mathcal{B}_C$ è una base di $\mathbb{R}^4$.*
4. *(2 punti) Trovare la matrice C' che rappresenta S_C nella base canonica in partenza e nella base $\mathcal{B}_2$ in arrivo.*
5. *(2 punti) Trovare una base $\mathcal{B}_1^A$ di $\mathbb{R}^3$ ed una base $\mathcal{B}_2^A$ di $\mathbb{R}^4$ tali che la matrice che rappresenta S_A in queste basi sia la matrice I.*

Esercizio 5. *Al variare di* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

1. *(3 punti) Trovare delle condizioni sui parametri affinché lo spettro di* A *sia reale.*
2. *(1 punto) Trovare una condizione sui parametri affinché la matrice* A *sia ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. *(3 punti) Per i valori trovati al punto precedente trovare una base ortonormale di* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *composta di autovettori per* A.