Esame scritto di Geometria.
Ingegneria civile.
Secondo appello a.a. 2024/25.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

3 febbraio 2025

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo il triangolo* T *di vertici* $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare il perimetro di* T.
2. *(1 punto) Calcolare l'area di* T.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiana della retta* r *passante per* P_2 *e* P_3.
4. *(1 punto) Stabilire se* T *è acutangolo o ottusangolo.*
5. *(1 punto) Calcolare il circocentro* C *di* T.
6. *(1 punto) Stabilire se* C *è interno o esterno a* T*, motivando la risposta.*
7. *(1 punto) In* $\mathcal{V}^2_O$ *dare la definizione di somma, ovvero dati due punti* $A, B \in \mathcal{E}^2$ *dare la definizione di* $\vec{OA} + \vec{OB}$.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo la retta* $r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \end{cases}$ *ed il piano* $\pi : x - 3y + 2z = 2$.

1. *(1 punto) Calcolare* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
2. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di* r.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di* π.
4. *(1 punto) Calcolare* $P_0 = r \cap \pi$.
5. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta passante per* P_0 *ed ortogonale a* π.
6. *(1 punto) Siano* $r : AX = b$ *ed* $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ *una retta ed un piano di* $\mathbb{R}^3$*, rispettivamente. Scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di* r *e* π *e dedurre una tabella con le possibili posizioni reciproche.*
7. *(1 punto) Sapendo che* $u = v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{R}^3$*, quanto fa* $(2v_1 - v_2) \wedge (v_1 + 3v_2)$*?*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 5 \\ -8 & -3 & 0 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare $P_A(x)$.*
2. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Calcolare A^{-1}.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Sia A è una matrice diagonalizzabile con autovalori $\{1, -1\}$. Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
6. *(1 punto) Sia A una matrice $h \times k$ di rango r. Calcolare dim $Ker(A)$.*
7. *(1 punto) Dimostrare che due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale V hanno la stessa cardinalità.*

Esercizio 4.

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 = (v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ *è un base di* $\mathbb{R}^2$.

2. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_2 = (w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ *è un base di* $\mathbb{R}^3$.

3. *(1 punto) Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *la funzione lineare tale che* $f(v_1) = 2w_1 - w_2 + w_3$ *e* $f(v_2) = w_1 + w_2$. *Calcolare la matrice* F *associata a* f *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$.

4. *(1 punto) Sia* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la funzione lineare tale che* $g(w_1) = v_1 + v_2$, $g(w_2) = v_1 - v_2$ *e* $g(w_3) = 2v_1 - v_2$. *Calcolare la matrice* G *associata a* g *nelle basi* $\mathcal{B}_2$ *e* $\mathcal{B}_1$.

5. *(1 punto) Calcolare la matrice* A *associata a* $g \circ f$ *nella base canonica* $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$ *di* $\mathbb{R}^2$.

6. *(1 punto) Stabilire se* $g \circ f$ *è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.*

7. *(1 punto) Sia* $f : V \to W$ *lineare. Dimostrare che* $Im(f)$ *è un sottospazio vettoriale di* W.

Esercizio 5. *In $\mathbb{R}^4$, consideriamo:*

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare una base $\mathcal{B}_U$ di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U.*
3. *(1 punto) Calcolare la distanza di P da U.*
4. *(2 punti) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e la dimensione dei $U + W$.*
5. *(1 punto) Applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt all'insieme* $\left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.