

Esame scritto di Geometria  
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio  
Quarto appello aa: 2023/24  
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

16 settembre 2024

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo il triangolo  $T$  avente come vertici i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. (2 punti) Trovare il circoncentro  $C$  di  $T$ .
2. (2 punti) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza  $\mathcal{C}$  circoscritta a  $T$ .
3. (1 punto) Stabilire se il triangolo  $T$  è rettangolo, ottusangolo oppure acutangolo.
4. (1 punto) Trovare il punto  $P_4$  ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto  $P_3$  attraverso la retta  $r$  passante per  $P_1$  e  $P_2$ .
5. (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo  $\theta \in [0, 2\pi)$  tale che il punto  $P_3$  è la rotazione del punto  $P_2$  attorno a  $C$  in senso anti-orario dell'angolo  $\theta$ .

Fare un disegno che illustri la situazione.

**Soluzione Esercizio 1.**

**Esercizio 2.** In  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  consideriamo i quattro punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 2 \\ -20 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Stabilire se i tre punti  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  sono allineati.
2. (2 punti) Calcolare l'area del triangolo  $T$  di vertici  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .
3. (2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche del più piccolo sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$  che contiene i tre punti  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ . Denotarlo con  $\pi$ .
4. (1 punto) Calcolare la distanza del punto  $Q$  da  $\pi$ .
5. (1 punto) Calcolare il volume della piramide di vertici  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $Q$ .

**Soluzione Esercizio 2.**

**Esercizio 3.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il determinante di  $A$ .*
2. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .*
3. (1 punto) *Determinare lo spettro di  $A$ .*
4. (2 punti) *Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ . Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .*
5. (1 punto) *Calcolare l'inversa di  $A$  utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*
6. (1 punto) *Calcolare l'inversa di  $A$  utilizzando la formula di Cramer.*

**Soluzione Esercizio 3.**

**Esercizio 4.** Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili  $x_1, \dots, x_5$  al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + (k+1)x_3 + (k+4)x_4 + (k+2)x_5 = 6k+1 \\ kx_2 + (k+1)x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2k \\ 2x_1 - kx_2 - (k+1)x_3 + (2-k)x_4 + (1-k)x_5 = 3k-1 \end{cases}$$

**Soluzione Esercizio 4.**

**Esercizio 5.** Consideriamo il seguente insieme ordinato di vettori di  $\mathbb{R}^4$ :

$$\mathcal{B} = \left( v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ed il vettore  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- (1 punto) Dimostrare che  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^4$ .
- (2 punti) Utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt su  $\mathcal{B}$  per trovare una base ortogonale  $\mathcal{C} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$  di  $(\mathbb{R}^4, \cdot)$  tale che  $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle F_1, \dots, F_i \rangle$  per ogni  $i = 1, \dots, 4$ .
- (1 punto) Trovare le equazioni cartesiane di  $\langle v_1, v_2 \rangle$ .
- (1 punto) Calcolare le coordinate di  $P$  nella base  $\mathcal{C}$ .
- (1 punto) Trovare il più grande indice  $j$  tale che  $P \notin \langle v_1, \dots, v_j \rangle$ .
- (1 punto) Denotare con  $U$  il sottospazio  $U = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  trovato al punto precedente. Calcolare la distanza di  $P$  da  $U$ .

**Soluzione Esercizio 5.**