Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Terzo appello aa: 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

17 giugno 2024

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.
2. *(2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana dell'asse* s_1 *del segmento* $\overline{P_1P_2}$ *e dell'asse* s_2 *del segmento* $\overline{P_1P_3}$.
3. *(1 punto) Calcolare il circocentro* C *del triangolo* T.
4. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e l'equazione parametrica della circonferenza* $\mathcal{C}$ *circoscritta al triangolo* T.
5. *(1 punto) Trovare il punto* P_4 *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_2 *attraverso la retta passante per* P_1 *e* P_2.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
2. *(2 punti) Calcolare la distanza di* P *dal piano* $\pi_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. *(1 punto) Consideriamo il piano affine* $\pi = P + \pi_0$ *e la retta affine* $r = (P - v_1) + \langle v_1 + v_2 \rangle$. *Stabilire la posizione reciproca di* r *e* π *senza cambiare la loro forma.*
4. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane di* π.
5. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta* s *passante per i punti* P *e* $Q = v_1 + v_2$.
6. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* P *su* π_0.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. *(1 punto) Calcolare A^{-1} con il teorema di Cayley-Hamilton.*
6. *(1 punto) Calcolare A^3.*
7. *(1 punto) Nello spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti reali, si consideri il sottospazio vettoriale $U = Span(\mathbf{1}_3, A, A^2, A^3, \cdots, A^{100})$. Trovare una base di U.*

Esercizio 4. *Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da*

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}\right).$$

1. *(1 punto) Calcolare* $f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
2. *(1 punto) Dimostrare che f è lineare.*
3. *(1 punto) Trovare la matrice A associata ad f nelle basi standard.*
4. *(1 punto) Sia* $\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. *Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.*
5. *(1 punto) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'unica funzione lineare tale che*

   $$\begin{aligned} g(e_1) &= v_1 + v_2 - v_3, \\ g(e_2) &= 2v_1 - 2v_2 + v_3. \end{aligned}$$

   Calcolare la matrice C associata a g nella base standard di $\mathbb{R}^2$ e nella base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.
6. *(1 punto) Calcolare la matrice D associata a $f \circ g$ nella base standard di $\mathbb{R}^2$.*
7. *(1 punto) Se D è invertibile calcolare D^{-1}, altrimenti calcolare una base del suo nucleo.*

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente piano di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0. \end{cases}$$

1. *(4 punti) Calcolare la matrice* P_U *di proiezione ortogonale su* U*.*
2. *(3 punti) Calcolare la distanza del vettore* $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *da* U*.*