

Esame scritto di Geometria
Ingegneria civile
Quarto appello a.a. 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

16 settembre 2024

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo il triangolo T avente come vertici i tre punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. (2 punti) Trovare il circoncentro C di T .
2. (2 punti) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza \mathcal{C} circoscritta a T .
3. (1 punto) Stabilire se il triangolo T è rettangolo, ottusangolo oppure acutangolo.
4. (1 punto) Trovare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P_3 attraverso la retta r passante per P_1 e P_2 .
5. (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che il punto P_3 è la rotazione del punto P_2 attorno a C in senso anti-orario dell'angolo θ .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Soluzione Esercizio 1.

Esercizio 2. In (\mathbb{R}^3, \cdot) consideriamo i quattro punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 2 \\ -20 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Stabilire se i tre punti P_1 , P_2 e P_3 sono allineati.
2. (2 punti) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
3. (2 punti) Calcolare l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche del più piccolo sottospazio affine di \mathbb{R}^3 che contiene i tre punti P_1 , P_2 e P_3 . Denotarlo con π .
4. (1 punto) Calcolare la distanza del punto Q da π .
5. (1 punto) Calcolare il volume della piramide di vertici P_1 , P_2 , P_3 e Q .

Soluzione Esercizio 2.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il determinante di A .*
2. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
3. (1 punto) *Determinare lo spettro di A .*
4. (2 punti) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} . Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
5. (1 punto) *Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*
6. (1 punto) *Calcolare l'inversa di A utilizzando la formula di Cramer.*

Soluzione Esercizio 3.

Esercizio 4. Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili x_1, \dots, x_5 al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + (k+1)x_3 + (k+4)x_4 + (k+2)x_5 = 6k+1 \\ kx_2 + (k+1)x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2k \\ 2x_1 - kx_2 - (k+1)x_3 + (2-k)x_4 + (1-k)x_5 = 3k-1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 4.

Esercizio 5. Consideriamo il seguente insieme ordinato di vettori di \mathbb{R}^4 :

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ed il vettore $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. (1 punto) Dimostrare che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^4 .
2. (2 punti) Utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt su \mathcal{B} per trovare una base ortogonale $\mathcal{C} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ di (\mathbb{R}^4, \cdot) tale che $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle F_1, \dots, F_i \rangle$ per ogni $i = 1, \dots, 4$.
3. (1 punto) Trovare le equazioni cartesiane di $\langle v_1, v_2 \rangle$.
4. (1 punto) Calcolare le coordinate di P nella base \mathcal{C} .
5. (1 punto) Trovare il più grande indice j tale che $P \notin \langle v_1, \dots, v_j \rangle$.
6. (1 punto) Denotare con U il sottospazio $U = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$ trovato al punto precedente. Calcolare la distanza di P da U .

Soluzione Esercizio 5.