

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria Civile
Secondo appello aa: 2023/24
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

12 febbraio 2024

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo la retta $r = P + \langle v \rangle$ dove

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta r .
2. (1 punto) Calcolare la pendenza m della retta r .
3. (1 punto) Calcolare il punto Q ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine O attraverso la retta r .
4. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici O, P, Q .
5. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche della bisettrice del triangolo T nel vertice O .
6. (1 punto) Calcolare la distanza dell'origine O dalla retta r .
7. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza \mathcal{C} di centro O e tangente alla retta r .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In \mathbb{R}^3 consideriamo le due rette

$$r_1 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2 , senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r_1 .
3. (1 punto) Sia v_1 un vettore direttore di r_1 e $v_2 = (1, -2, 1)^t$ il vettore direttore di r_2 fornito dal testo. Calcolare $v_3 = v_1 \wedge v_2$.
4. (1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2 .
5. (1 punto) Dimostrare che le due rette r_1 ed r_2 sono ortogonali.
6. (1 punto) Sia π_1 il piano passante per r_1 ed ortogonale ad r_2 e sia π_2 il piano passante per r_2 ed ortogonale ad r_1 . Calcolare equazioni cartesiane della retta $r_3 = \pi_1 \cap \pi_2$.
7. (1 punto) Calcolare $Q_1 = \pi_2 \cap r_1$ e $Q_2 = \pi_1 \cap r_2$. Dimostrare che r_3 è la retta di minima distanza tra r_1 ed r_2 ovvero la retta tale che $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(Q_1, Q_2)$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 10 & -7 & 2 \\ 80 & -64 & 17 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il determinante di A .*
2. (1 punto) *Calcolare A^2 .*
3. (1 punto) *Trovare l'unico vettore v tale che $Av = e_1$.*
4. (1 punto) *Calcolare una base di $V_1(A)$, ovvero l'autospazio di A relativo all'autovalore 1.*
5. (1 punto) *Calcolare una base di $V_{-1}(A)$, ovvero l'autospazio di A relativo all'autovalore (-1) .*
6. (1 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} . Nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
7. (1 punto) *Dimostrare che una matrice diagonalizzabile $n \times n$ avente come unico autovalore 1 è la matrice identità.*

Esercizio 4. Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$F(p(x)) = (x + 1)p(x + 1) - xp'(x + 1)$$

per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

1. (1 punto) Calcolare la matrice A associata ad F nelle basi standard.
2. (1 punto) Stabilire se F è iniettiva.
3. (1 punto) Trovare una base $\mathcal{B}_{\text{Im}(F)}$ dell'immagine di F .
4. (1 punto) Trovare l'unico polinomio $p(x)$ tale che $F(p(x)) = 1 + x + x^3$.
5. (1 punto) Dimostrare che i tre polinomi $q_1(x) = 1 + x$, $q_2(x) = 1 + x + x^2$ e $q_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ sono linearmente indipendenti.
6. (1 punto) Trovare un polinomio $q_4(x)$ tale che l'insieme $\mathcal{B} = (q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x))$ sia una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
7. (1 punto) Calcolare la matrice associata ad F nella base standard in partenza e nella base \mathcal{B} in arrivo.

Esercizio 5. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 3.$$

Consideriamo il polinomio di secondo grado

$$p(X) = X^t A X + 2b \cdot X + c$$

nella variabile vettoriale $X = (x_1, x_2)^t$ e la conica $\mathcal{C}_p = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid p(X) = 0\}$.

1. (1 punto) *Calcolare $p(X)$.*
2. (1 punto) *Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. (1 punto) *Calcolare la segnatura di A .*
4. (1 punto) *Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.*
5. (1 punto) *Trovare il polinomio $q(Y)$ ottenuto da $p(X)$ mediante il cambio di variabile $X = B Y$.*
6. (1 punto) *Trovare il centro C della conica, ovvero un vettore C tale che il cambio di variabile $Y = Z + C$ trasformi il polinomio $q(Y)$ in un polinomio $r(Z)$ che non ha parte lineare.*
7. (1 punto) *Trovare la forma canonica metrica di \mathcal{C}_p e stabilire di quale conica si tratta.*